Analisi Matematica 1, Scritto A $\boxed{\textbf{6CFU - Chimica}}$ **Durata della prova: 90min.**
17.2.14

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

Domanda 1

[5 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

(ii) Dare un esempio di funzione $f(x)$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 9$.

Risposta

(i)

cfr. compito 1-A (9 CFU)

(ii)

Domanda 2

[5 punti]

(i) Dare la definizione di funzione continua in x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 6 e non continua in 5.

Risposta

(i)

cfr. compito 1-A (9 CFU)

(ii)

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! + 528}{(n+2)!}$$

Risoluzione

$$n! + 528 \sim n! \Rightarrow \frac{n!+528}{(n+2)!} \sim \frac{\cancel{n!}^{\,1}}{(n+2)\cdot(n+1)\cdot \cancel{n!}_{\,1}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(n+2)}_{\sim n}\cdot(n+1)} \sim \frac{1}{n(n+1)}$$

per $n \to +\infty$

Inoltre la serie (di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!+528}{(n+2)!} \text{ converge.}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = 1 + x + \sqrt{12 + x^2}$.

Risoluzione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

- $f(x_0) = 1 + 2 + \sqrt{12+2^2} = 3 + \sqrt{16} = 7$
- $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{12+x^2}} \Rightarrow f'(x_0) = 1 + \frac{2}{4} = 3/2$

$$\Rightarrow f(x) = 7 + \frac{3}{2}(x-2)$$

Esercizio 3

[5 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Risoluzione

Cfr. Compito 1-A, Es. 2
(9CFU)

Esercizio 4 **[7 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = (x-2)\cdot e^x$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: $\mathbb{R}$

- $f(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-2)\cdot e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} \left(= \frac{-\infty}{+\infty}\right)$

$\overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

$\Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

- $f'(x) = 1\cdot e^x + (x-2)\cdot e^x = (x-1)\underbrace{e^x}_{>0\ \forall x\in\mathbb{R}} = 0 \iff x = 1$

Inoltre $f'(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$

$\Rightarrow x_0 = 1$ è un pto. di min. loc.

$\searrow$ $\nearrow$ 0 1 x

(• Segno di f: $f(x) > 0 \iff x-2>0 \iff x>2$)

- Grafico