Esercizio 5 [5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 \sin(x^3)}{x^6+y^6} + 5y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

$$f(x,mx) = \frac{(mx)^3 \sin(x^3)}{x^6+(mx)^6} + 5mx =$$

$$= \frac{m^3 x^3 \sin(x^3)}{x^6(1+m^6)} + 5mx = \frac{m^3}{1+m^6}\,\frac{\sin(x^3)}{x^3} + 5mx$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{m^3}{1+m^6}\underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{1} + \underbrace{5mx}_{0}\right) = \frac{m^3}{1+m^6}$$ dipende da m

quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste

dunque f non è continua in $(0,0)$

allora f non è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^3\sin(h^3)}{h^6+0^6} + 5\cdot 0 - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3\sin(0^3)}{0^6+h^6} + 5h - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 5 = 5$$

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola.............................. Corso di Laurea.......................................

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1 [4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

(ii) Dare un esempio di funzione $f(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 9$.

Risposta

(i) Per ogni successione x_n con $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ risulta $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 5$

(ii) $f(x) = 9 + \frac{1}{x}$

Domanda 2 [4 punti]

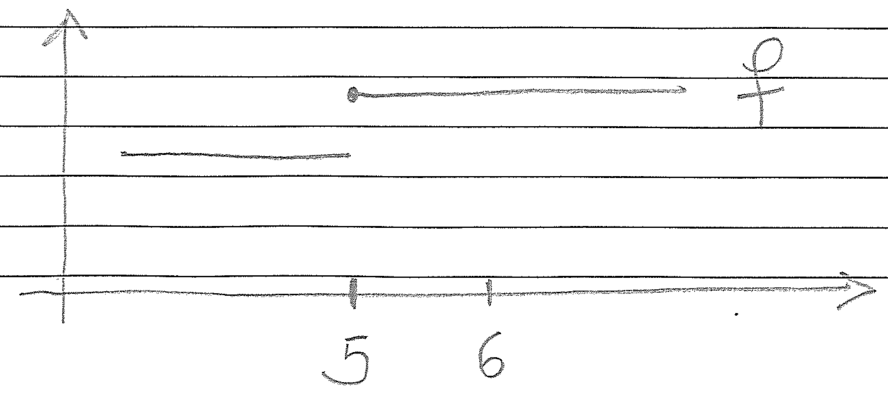
(i) Dare la definizione di funzione continua in x_0 per $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione continua in 6 e non continua in 5.

Risposta

(i) Per ogni successione x_n con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ risulta $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii)



Esercizio 1 [5 punti]

Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!+258}{(n+1)!}$$

Risoluzione Criterio del Confronto Asintotico

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n!+258}{(n+1)!}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+258}{(n+1)!}(n+1) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+258}{n!\,(n+1)}(n+1) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+258}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{258}{n!}\right) = 1$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ diverge, anche $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!+258}{(n+1)!}$ diverge

Esercizio 2 [4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.
$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx. = *$$

Risoluzione

$$* = \lim_{c\to0^+}\boxed{\int_c^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx} = (X)$$

$$\int_c^4 x^{-\frac13}\,dx = \left[\frac{x^{-\frac13+1}}{-\frac13+1}\right]_{x=c}^{x=4} = \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_{x=c}^{x=4} = \frac{4^{2/3}}{2/3} - \frac{c^{2/3}}{2/3}$$

$$(X) = \lim_{c\to0^+}\left(\frac{4^{2/3}}{2/3} - \frac{c^{2/3}}{2/3}\right) = \frac{4^{2/3}}{2/3} = \frac32\sqrt[3]{4^2} = \frac32\sqrt[3]{16} =$$

$$= \frac32\sqrt[3]{2^3\cdot 2} = \frac32\,2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1,2)$ alla funzione $f(x,y) = 1+xy+\sqrt{20+x^2+y^2}$.

Risoluzione $P(x,y) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)$

$$f(1,2) = 1+1\cdot2+\sqrt{20+1^2+2^2} = 1+2+\sqrt{20+1+4} = 3+\sqrt{25} = 3+5 = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \frac{1}{2\sqrt{20+x^2+y^2}}\,2x = y + \frac{x}{\sqrt{20+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{1}{2\sqrt{20+x^2+y^2}}\,2y = x + \frac{y}{\sqrt{20+x^2+y^2}}$$

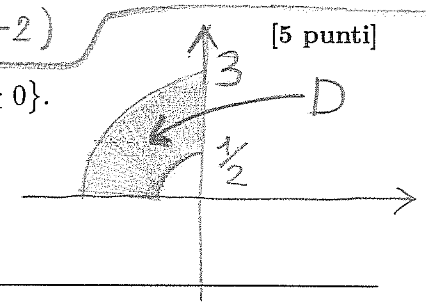
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 + \frac{1}{\sqrt{20+1^2+2^2}} = 2+\frac15 = \frac{11}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{20+1^2+2^2}} = 1+\frac25 = \frac75$$

$$P(x,y) = 8 + \frac{11}{5}(x-1) + \frac75(y-2)$$

Esercizio 4 [5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac14 \le x^2+y^2 \le 9,\quad x\le0,\quad y\ge0\}$.
Calcolare l'integrale $\iint_D 6xy\,dxdy. = *$



Risoluzione Coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\text{sen}\,\theta$

$$\frac14 \le \rho^2 \le 9 \qquad \frac12 \le \rho \le 3$$

$$D' = \{(\rho,\theta): \tfrac12 \le \rho \le 3,\ \tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\}$$

$$* = \iint_{D'} 6\rho\cos\theta\,\rho\,\text{sen}\,\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac12}^{3}\left(\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 6\rho^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta}_{(+)}\right)d\rho =$$

$$(+) = 3\rho^3\left[(\text{sen}(\theta))^2\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} = 3\rho^3\left[(\text{sen}(\pi))^2 - \left(\text{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)^2\right] = 3\rho^3\left[0^2-1^2\right] = -3\rho^3$$

$$= \int_{\frac12}^{3} -3\rho^3\,d\rho = -\frac34\left[\rho^4\right]_{\rho=\frac12}^{\rho=3} = -\frac34\left[3^4-\left(\frac12\right)^4\right] = -\frac34\left[81-\frac{1}{16}\right]$$