Esercizio 5 [5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin(x^2)}{x^4+y^4} + 5x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

$$f(x,mx) = \frac{(mx)^2 \sin(x^2)}{x^4+(mx)^4} + 5x =$$

$$= \frac{m^2 x^2 \sin(x^2)}{x^4(1+m^4)} + 5x = \frac{m^2}{1+m^4} \frac{\sin(x^2)}{x^2} + 5x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{m^2}{1+m^4}\underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{5x}_{\downarrow\, 0}\right) = \frac{m^2}{1+m^4} \text{ dipende da } m$$

quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste

dunque f non è continua in $(0,0)$

allora f non è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2 \sin(h^2)}{h^4+0^4} + 5h - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h\to 0} 5 = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 \sin(0^2)}{0^4+h^4} + 5\cdot 0 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 17.2.14

Cognome.............................Nome.................................A.A.........

Matricola.............................Corso di Laurea.....................................

Firma:..........................

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1 [4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$.

(ii) Dare un esempio di funzione $f(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$.

Risposta

(i) Per ogni successione x_n con $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ risulta $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 4$

(ii) $f(x) = 6 + \frac{1}{x}$

Domanda 2 [4 punti]

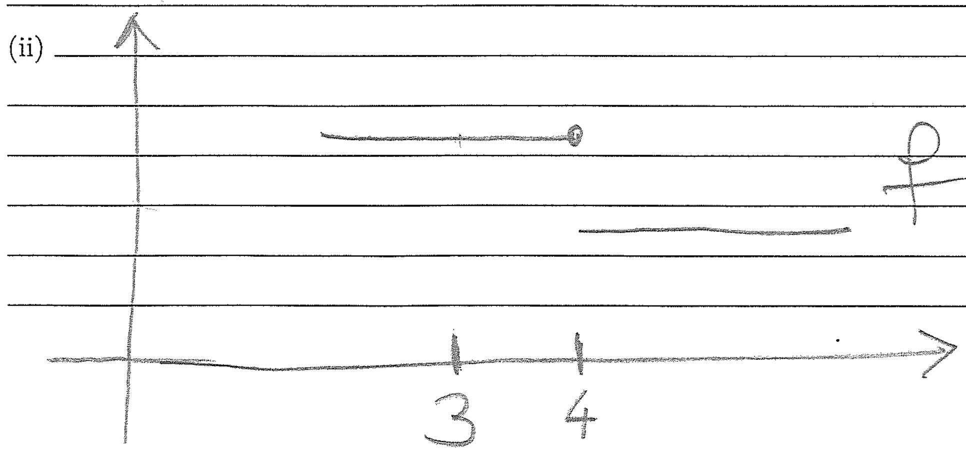
(i) Dare la definizione di funzione continua in x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione continua in 3 e non continua in 4.

Risposta

(i) Per ogni successione x_n con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ risulta $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii)



Esercizio 1 [5 punti]

Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!+194}{(n+1)!}$$

Risoluzione Criterio del Confronto Asintotico

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n!+194}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+194}{(n+1)!}(n+1) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+194}{n!\,(n+1)}(n+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+194}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{194}{n!}\right) = 1$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!+194}{(n+1)!}$ diverge

Esercizio 2 [4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.
$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx. = *$$

Risoluzione $* = \lim_{c\to0^+} \boxed{\int_c^3 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx} = \otimes$

$$\| \quad \int_c^3 x^{-\frac14}\,dx = \left[\frac{x^{-\frac14+1}}{-\frac14+1}\right]_{x=c}^{x=3} =$$

$$= \left[\frac{x^{3/4}}{3/4}\right]_{x=c}^{x=3} = \frac{3^{3/4}}{3/4} - \frac{c^{3/4}}{3/4}$$

$$\otimes = \lim_{c\to0^+}\left(\frac{3^{3/4}}{3/4} - \frac{c^{3/4}}{3/4}\right) = \frac{3^{3/4}}{3/4} = \frac43\sqrt[4]{3^3} = \frac43\sqrt[4]{27}$$

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare il piano tangente in $(2,1)$ alla funzione $f(x,y) = 2+xy+\sqrt{4+x^2+y^2}$.

Risoluzione $P(x,y) = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)$

$$f(2,1) = 2+2\cdot1+\sqrt{4+2^2+1^2} = 2+2+\sqrt{4+4+1} = 4+\sqrt{9} = 4+3 = 7$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \frac{1}{2\sqrt{4+x^2+y^2}}\,2x = y + \frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{1}{2\sqrt{4+x^2+y^2}}\,2y = x + \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$$

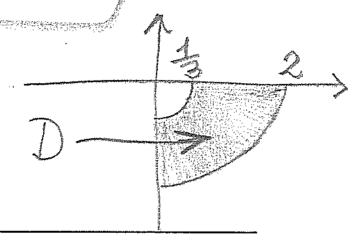
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{4+2^2+1^2}} = 1+\frac23 = \frac53$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{4+2^2+1^2}} = 2+\frac13 = \frac73$$

$$P(x,y) = 7 + \frac53(x-2) + \frac73(y-1)$$

Esercizio 4 [5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac19 \le x^2+y^2 \le 4, \quad x\ge0, \quad y\le0\}$.
Calcolare l'integrale $\iint_D 4xy\,dxdy = *$



Risoluzione Coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$

$\frac19 \le \rho^2 \le 4 \qquad \frac13 \le \rho \le 2$

$D' = \{(\rho,\theta) : \frac13 \le \rho \le 2, \ \frac32\pi \le \theta \le 2\pi\}$

$$* = \iint_{D'} 4\rho\cos\theta\,\rho\operatorname{sen}\theta\,\rho\,d\rho d\theta = \int_{\frac13}^{2}\Bigg(\underbrace{\int_{\frac32\pi}^{2\pi} 4\rho^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta}_{\oplus}\Bigg)d\rho =$$

$$\oplus = 2\rho^3\left[(\operatorname{sen}\theta)^2\right]_{\theta=\frac32\pi}^{\theta=2\pi} = 2\rho^3\left[(\operatorname{sen}(2\pi))^2 - \left(\operatorname{sen}\left(\tfrac32\pi\right)\right)^2\right] = 2\rho^3\left[0^2-(-1)^2\right] = -2\rho^3$$

$$= \int_{\frac13}^{2} -2\rho^3\,d\rho = -\frac24\left[\rho^4\right]_{\rho=\frac13}^{\rho=2} = -\frac12\left[2^4 - \left(\frac13\right)^4\right] = -\frac12\left[16 - \frac{1}{81}\right]$$