

Cognome Nome

Matricola Corso di Laurea.....

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Fermat.

(ii) Trovare i punti critici della funzione $f(x) = e^{x^3-3x^2-9x+5}$, $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$.
 Se x_0 è un punto di estremo locale di f , allora
 $f'(x_0) = 0$.

(ii) • x_0 è un punto critico di f se $f'(x_0) = 0$.
 • $f'(x) = e^{x^3-3x^2-9x+5} \cdot (3x^2 - 6x - 9)$
 $= \underbrace{3 \cdot e^{x^3-3x^2-9x+5}}_{\neq 0 \forall x \in \mathbb{R}} \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow x = x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$$

Quindi $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ sono i punti critici di f .

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ per una successione numerica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.(ii) Dare l'esempio di una successione *non* monotona che diverge a $+\infty$.

Risposta

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ se $\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_n \geq M \quad \forall n \geq n_0.$$

(ii) Per esempio la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita come

$$x_n := \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari} \\ n^2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

non è monotona e diverge a $+\infty$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sinh(x) - \ln(1+x^2)}{x^4} =: l$$

Risoluzione

- Numeratore da sviluppare fino al 4° ordine:

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow x \cdot \sinh(x) = x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow x \cdot \sinh(x) - \ln(1+x^2) = \cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$= \frac{1+3}{6} \cdot x^4 + o(x^4) \sim \frac{2}{3} \cdot x^4 \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} \cdot x^4}{x^4} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^e x^3 \cdot (\ln(x^2) + 1) dx$$

Risoluzione

- Usando integrazione per parti segue

$$\int \underbrace{x^3}_{f'} \cdot \underbrace{(2 \cdot \ln(x) + 1)}_g dx = \underbrace{\frac{x^4}{4}}_f \cdot \underbrace{(2 \cdot \ln(x) + 1)}_g - \int \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{f'} \cdot \underbrace{2 \cdot \frac{1}{x}}_{g'} dx$$

$$= \frac{x^4}{2} \cdot \ln(x) + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{2} \cdot \ln(x) + \frac{x^4}{8} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^e x^3 \cdot (\ln(x^2) + 1) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^4}{2} \cdot \ln(x) + \frac{x^4}{8} \right]_a^e$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^4}{2} \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} + \frac{e^4}{8} - \underbrace{\frac{a^4}{2} \cdot \ln(a)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{a^4}{8}}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) e^4 = \underline{\underline{\frac{5}{8} \cdot e^4}}$$

N.B.: Si usa il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \ln(x) = 0 \quad \forall \alpha > 0$.

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1, \pi)$ per la funzione $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{y}$ e il versore $v = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Risoluzione

• Per il teorema del gradiente vale

$$D_v f(1, \pi) = f_x(1, \pi) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + f_y(1, \pi) \cdot \frac{3}{5}$$

$$\bullet f_x(x, y) = \frac{1}{y} \cdot \cos(xy) \cdot y \Rightarrow f_x(1, \pi) = \cos(1 \cdot \pi) = -1$$

$$\bullet f_y(x, y) = \frac{y \cdot \cos(xy) \cdot x - 1 \cdot \sin(xy)}{y^2} \Rightarrow f_y(1, \pi) = \frac{\pi \cdot \overset{=-1}{\cos(\pi)} - \overset{=0}{\sin(\pi)}}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned} D_v f(1, \pi) &= -1 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5\pi} \\ &= \frac{4\pi - 3}{5\pi} \end{aligned}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot e^y}{x^2 + 2y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Risoluzione

$$\bullet \text{ Ponendo } x=0 \text{ si ha } \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overset{=0}{(1 - \cos(0))} \cdot e^y}{0^2 + 2y^2} = 0 \neq f(0, 0) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0, 0) \Rightarrow f$ non differenziabile in $(0, 0)$

$$\bullet \text{ Derivate parziali: } f(h, 0) = \frac{(1 - \cos(h)) \cdot e^0}{h^2 + 2 \cdot 0^2} = \frac{1 - \cos(h)}{h^2}$$

$$f(0, h) = \frac{\overset{=1-1=0}{(1 - \cos(0))} \cdot e^h}{0^2 + 2 \cdot h^2} = 0. \text{ Quindi risulta}$$

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(h) \cdot 1}{h^2 + 2 \cdot 0^2} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cdot \cos(h) - h^2}{2 \cdot h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cdot (1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)) - h^2}{2 \cdot h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{h^2} - \cancel{h^2} + o(h^3)}{h^3} = 0 \end{aligned}$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - \frac{1}{2}}{h} \text{ non converge}$$

$\Rightarrow f$ è derivabile rispetto ad x ma non rispetto ad y in $(0, 0)$.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, zeri, segno, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

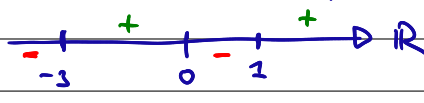
Risoluzione

Domínio X: $x \in X \Leftrightarrow x^2+3x = x \cdot (x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix}$
 $\Rightarrow X = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Segno: Il segno di $f(x)$ cambia in $x=1$ e in $x=\begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix}$

molte $f(x) > 0$ per $x > 1$: Quindi abbiamo che

 $\mathbb{R}$ cioè $f(x) > 0$ per $x \in (-3, 0) \cup (1, +\infty)$
 $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 1)$

Asintoti: $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} f(x) = \frac{-3-1}{-3 \cdot (-3^\pm+3)} = \frac{-4}{0^\pm} = \pm\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \frac{0-1}{0^\pm \cdot (0+3)} = \frac{-1}{3 \cdot 0^\pm} = \mp\infty$ $\Rightarrow$ asintoti
 verticali $x=-3$
 e $x=0$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (poiché grado denominatore $>$ grado numeratore) $\Rightarrow y=0$ asintoto
 orizzontale

Estremi locali: Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici.

$f'(x) = \frac{(x^2+3x) \cdot 1 - (2x+3) \cdot (x-1)}{(x^2+3x)^2} = \frac{x^2+3x-2x^2-3x+2x+3}{(x^2+3x)^2}$

$= \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4 \cdot 3}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$
 $> 0 \forall x \in X$

Inoltre segno $f'(x) =$ segno $p(x) := -x^2+2x+3$

$\Rightarrow x_1 = 3$ è un punto di max locale

$x_2 = -1$ è un punto di min locale

con $f(3) = \frac{2}{9}$ e $f(-1) = 1$.

Grafico:

