Analisi Matematica (1) $\boxed{9\,\text{CFU}}$ Durata della prova: 2 ore 18.6.14

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone.

(ii) Fare un esempio di una successione decrescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 999$.

Risposta

(i) Ogni successione monotona $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare con

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} & \text{se è crescente} \\ \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} & \text{se è decrescente.} \end{cases}$$

(ii)

$a_n = 999 + \frac{1}{n}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione del polinomio di Taylor $T_n(x)$ di ordine n di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

(ii) Dire se esiste una funzione f tale che il grado di $T_4(x)$ è uguale a 3. Giustificare la risposta.

Risposta

(i) Sia $f \in C^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Allora

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(ii) Sì. Per esempio per $f = \sin$ e $x_0 = 0$ vale

$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\Big(\sqrt{n}\cdot(1-\cos(\frac{1}{n}))\Big) =: S$

Risoluzione

i) $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$,

ii) $\sin(t) \sim t$ per $t \to 0$.

principio di sostituzione

Quindi: $1-\cos(\underbrace{1/n}_{\substack{\| \\ x \to 0 \text{ per } n \to +\infty}}) \overset{i)}{\sim} 1/2n^2 \Rightarrow \sqrt{n}\cdot(1-\cos(1/n)) \sim \sqrt{n}\cdot\frac{1}{2n^2} =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}} \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \sin\Big(\underbrace{\sqrt{n}\cdot(1-\cos(1/n))}_{=t \to 0 \text{ per } n \to +\infty}\Big) \overset{ii)}{\sim} \sqrt{n}\cdot(1-\cos(1/n)) \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$

Per il criterio del confronto S converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, $3/2 = \alpha$

però $\alpha = 3/2 > 1$, quindi S converge.

serie armonica generalizzata

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}} = \ell$$

Risoluzione

$a^r = e^{r\cdot\ln(a)}$

- $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}}$

continuità della funzione espon.

- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \left(= \frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ell = e^{1/2} = \sqrt{e}$

Esercizio 3

[3 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1, \frac{1}{2})$ per la funzione $\quad f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} \quad$ e il versore $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Risoluzione

$f_x(x,y) = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow f_x(1, 1/2) = 2 \cdot e^2$

$f_y(x,y) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^2} \Rightarrow f_y(1, 1/2) = -4 \cdot e^2$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(1, 1/2) = (2e^2, -4e^2)$. Per il teorema del gradiente segue

prodotto scalare

$D_v f(1, 1/2) = \operatorname{grad} f(1, 1/2) \cdot v$

$= (2e^2, -4e^2) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2)$

$= e^2 - 2 \cdot \sqrt{3}\, e^2 = e^2(1 - 2\sqrt{3})$

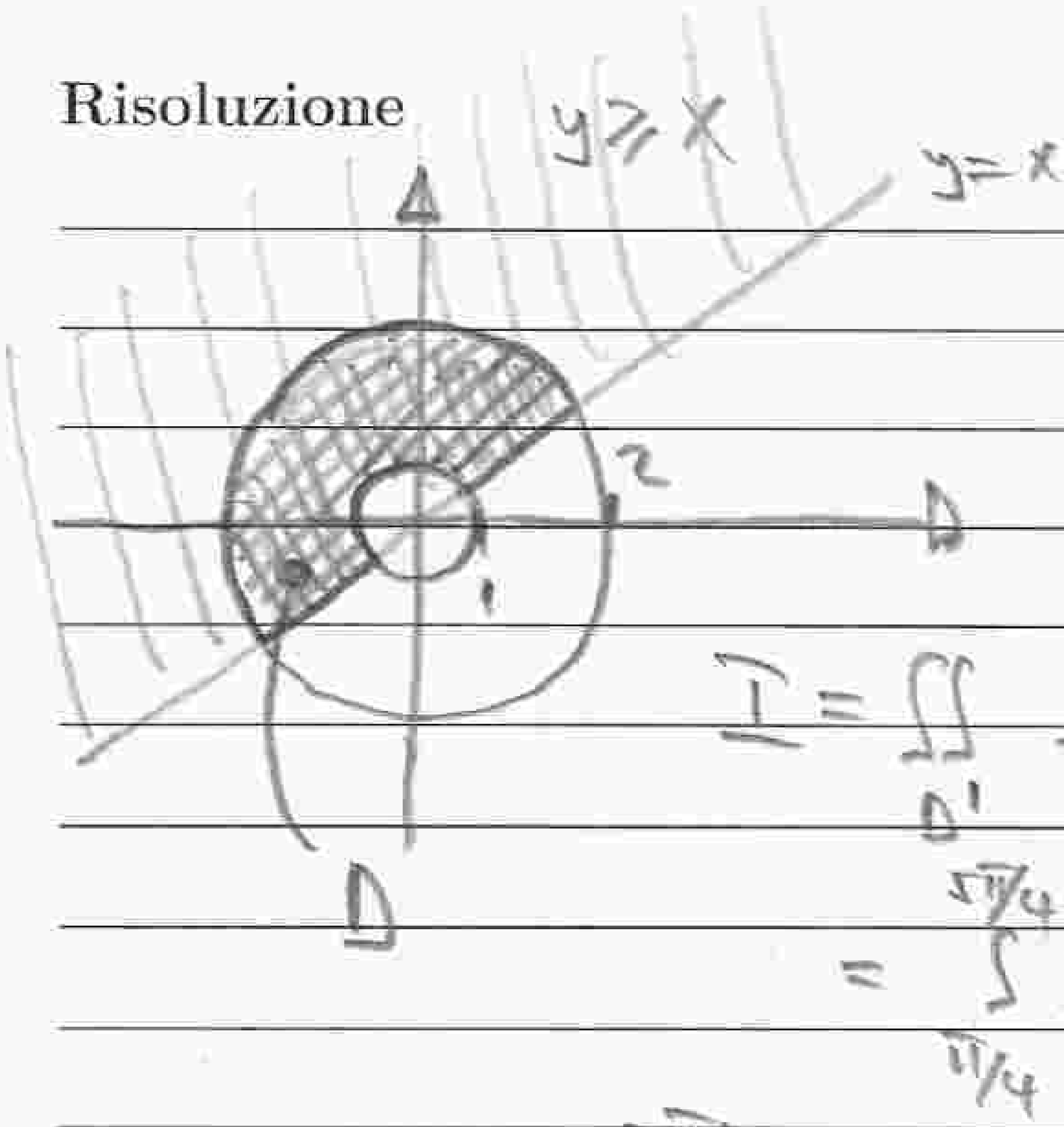
Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq y\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{x^2 \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy. =: I$$

Risoluzione



D in coord. cartesiane corrisponde a

$D' = [1,2] \times [\pi/4, 5/4\pi]$ in coord. polari.

Quindi

!!

$I = \iint_{D'} \frac{\rho^2 \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \rho \cdot \sin\vartheta}{\rho} \cdot \rho \, d\rho\, d\vartheta$

$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_1^2 \rho^3 \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \sin\vartheta \, d\rho\, d\vartheta$

sost. $\cos(\vartheta) = x \Rightarrow dx = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

$= \frac{\rho^4}{4}\Big|_1^2 \cdot \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta)\, d\vartheta \overset{!}{=} \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) \cdot (-1) \int_{\dots}^{\dots} x^2\, dx$

$x = \cos\vartheta$

$= (4 - 1/4) \cdot \left[\frac{-x^3}{3}\right]_{\dots}^{\dots} \overset{!}{=} \frac{15}{4} \cdot -\frac{\cos^3(\vartheta)}{3}\Big|_{\pi/4}^{5/4\pi} = \frac{5}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right]$

$= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \cdot 2^{-5/2} = \frac{5}{8} \cdot \sqrt{2}$

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di discontinuità, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = x^2 \cdot \ln|x|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• La funzione è pari $\Rightarrow$ basta studiare f per $x > 0$ ove

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) \quad \text{per } x > 0.$$

• zeri per $x > 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3}$

$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{x} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ è una discont. eliminabile

• $f'(x) \overset{x>0}{=} 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(1 + 2\ln(x)) \Rightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \\ > 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1/2 \Leftrightarrow x > e^{-1/2} \\ < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1/2} \end{cases}$$

Quindi f è decrescente in $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ e decrescente in $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è un pto. di minimo locale.

Grafico: