Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 19.6.17

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di una funzione continua $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di una funzione $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ che è continua ma non derivabile in $x_0 = 3$.

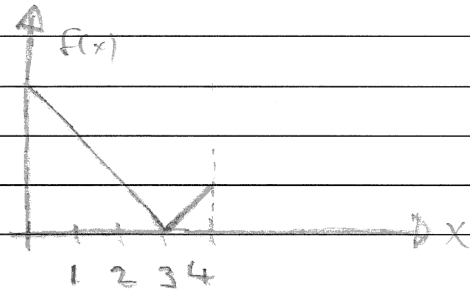
Risposta

(i)

→ Appunti

(ii) p.e. $f(x) := |x-3|$, $x \in [0,4]$ è continua

ma non derivabile in $x_0 = 3$



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Trovare i punti c del teorema di Rolle per la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2 + x - x^2)$.

Risposta

(i)

→ Appunti

(ii) • f è derivabile in $(0,1)$ e continua in $[0,1]$

• $f(0) = f(1) = \ln(2)$

• $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2+x-x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = c = 1/2$

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{2x}}{\sin(3x)+x^4}$$

Risoluzione

$$\frac{1-\cos\sqrt{2x}}{\sin(3x)+x^4} = \underbrace{\frac{1-\cos\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x})^2}}_{\to 1/2} \cdot \frac{(\sqrt{2x})^2}{\underbrace{\frac{\sin(3x)+x^4}{3x}}_{\to 1} \cdot 3x}$$

$$= \frac{2x}{3x} = 2/3$$

$$\to \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{per } x \to 0^+$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^3}\,dx$$

$\ln(x^2) = 2\cdot\ln(x)$

Risoluzione

- Con integrazione per parti segue:

$$2\cdot\int \underbrace{x^{-3}}_{f'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx = 2\cdot\left[\underbrace{\frac{x^{-2}}{-2}}_{f}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{g} - \int\frac{x^{-2}}{-2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right]$$

$$= -\frac{\ln(x)}{x^2} + \int x^{-3}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2x^2}$$

- $$I = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\ln(x^2)}{x^3} = \lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{2\ln(x)+1}{2x^2}\right]_1^c$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\left[\underbrace{-\frac{2\ln(c)+1}{2c^2}}_{\to 0} + \frac{2\overbrace{\ln(1)}^{=0}+1}{2\cdot 1^2}\right] = 1/2$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(x_0, y_0) = (1, -1)$ alla funzione $f(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y^2}$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = 1 \cdot e^{1\cdot(-1)^2} = e$
- $f_x(x,y) = 1 \cdot e^{x\cdot y^2} + x \cdot e^{x \cdot y^2} \cdot y^2 \Rightarrow f(x_0,y_0) = e + e = 2e$
- $f_y(x,y) = x \cdot e^{x\cdot y^2} \cdot 2xy \Rightarrow f(x_0,y_0) = -2e$

$\Rightarrow \underline{p(x,y) = e + 2e(x-1) - 2e(y+1)}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1, 2)$ per $f(x, y) = x^3 \cdot y$ e il versore $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Risoluzione

- f è C^1 quindi differenziabile. Quindi per il teorema del gradiente vale

$D_v f(1,2) = \text{grad} f(1,2) \cdot v.$

- $f_x(x,y) = 3x^2 \cdot y \Rightarrow f_x(1,2) = 3 \cdot 2 = 6$
- $f_y(x,y) = x^3 \cdot 1 \Rightarrow f_y(1,2) = 1$

$\left.\right\} \Rightarrow \text{grad} f(1,2) = (6,1)$

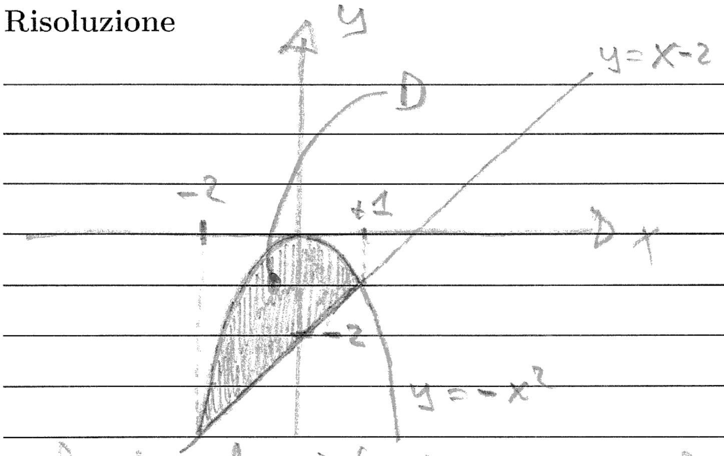
$\Rightarrow D_v f(1,2) = (6,1) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{3 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Esercizio 5 [6 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2 \le y \le -x^2\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$J := \iint_D e^x\,dx\,dy$$

Risoluzione



Punti di intersezione: $x-2=-x^2 \iff x^2+x-2=0$

$\iff x = x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases}-2\\ +1\end{cases}$

• D è y-semplice: $D=\{(x,y) \mid x\in[-2,1],\ x-2\le y\le -x^2\}$

• $f(x,y)=e^x$ è continua

Quindi per Fubini-Tonelli segue

$$J = \int_{-2}^{1}\int_{y=x-2}^{-x^2} e^x\,dy\,dx = \int_{-2}^{1}\left[y\cdot e^x\right]_{y=x-2}^{-x^2}dx$$

$$= \int_{-2}^{1}(\underbrace{-x^2-x+2}_{f})\cdot \underbrace{e^x}_{g'}\,dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} (\underbrace{-x^2-x+2}_{f})\cdot \underbrace{e^x}_{g}\Big|_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1}(-2x-1)\cdot e^x\,dx$$

$$= (-x^2-x+2)e^x\Big|_{-2}^{1} + \int_{-2}^{1} (\underbrace{2x+1}_{f})\cdot \underbrace{e^x}_{g'}\,dx$$

$$\overset{\text{(i.p.p.)}}{=} (-x^2-x+2)e^x\Big|_{-2}^{+1} + (2x+1)e^x\Big|_{-2}^{+1} - \overbrace{\int_{-2}^{1} 2\cdot e^x}^{=\,2\cdot e^x\big|_{-2}^{1}}$$

$$= (-x^2+x+1)\cdot e^x\Big|_{-2}^{1} = (-1^2+1+1)\cdot e - (-(-2)^2-2+1)\cdot e^{-2}$$

$$= e - \frac{5}{e^2}$$