Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **19.7.10**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [E-A] [08/09]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

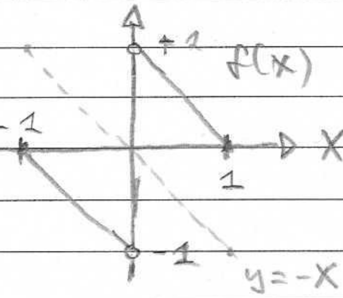
[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di massimo e minimo locale per una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Verificare se $f(x) = \frac{|x|}{x} - x$ ha massimo e minimo assoluto in $D = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

Risposta

(i) $x_0 \in D$ è un punto di min. (max.) locale se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \le f(x)$ $(f(x_0) \ge f(x))$ $\forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



(ii) $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Quindi

$\sup f = +1$, $\inf f = -1$ ma non $\exists\, x_0, x_1 \in D$ t.c. $f(x_0) = -1$, $f(x_1) = +1$, cioè f non ammette min/max assoluto

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

(ii) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Risposta

(i) Se $a_n > 0$ definitivamente t.c. $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$ converge, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, se $q < 1$ diverge a $+\infty$ se $q > 1$, non si può dire nulla sulla convergenza se $q = 1$.

(ii) $\frac{n!}{n^n} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre vale

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)} \cdot n^n}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n \cdot \cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} = \frac{1}{2.7\ldots} = q < 1 \text{ per } n \to +\infty$$

Quindi la serie converge per (i).

Esercizio 1

[3 punti]

Sapendo che $\lim_{x\to5} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to5} f(x)\cdot g(x) = -73$ si può conclude che $\lim_{x\to5} \frac{1}{g(x)}$

[a] esiste finito   [b] esiste infinito   [c] non esiste   [d] no si può concludere nulla

Risoluzione

Visto che $f(x)\cdot g(x) \to -73 \neq 0$ per $x \to 5$, per x vicino a 5 $f(x), g(x) \neq 0$. Quindi si può scrivere

$$\frac{1}{g(x)} = \underbrace{f(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}_{\to \frac{1}{-73}} \to 0 \cdot \frac{1}{-73} = 0 \text{ per } x \to 5.$$

Esercizio 2

[3 punti]

Il polinomio $p(x) = -x^2$ è il polinomio di McLaurin di ordine $n = 5$ di

[a] $e^{(x^6)} - x^2$ [b] $-(x-4)^2$ [c] $2(\cos(x) - 1)$ [d] $\cos(x) - \cosh(x)$

Risoluzione

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ $(x \to 0)$

$$\Rightarrow \cos(x) - \cosh(x) = \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^4}{24}}\right) - \left(\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^4}{24}}\right) + o(x^5)$$
$$= 2 \cdot \frac{-x^2}{2} + o(x^5) = -x^2 + o(x^5) \quad (x \to 0) \Rightarrow \boxed{d}$$

$\left(\text{NB: } 2\cdot(\cos(x) - 1) = -x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^5) \Rightarrow T_5(x) = -x^2 + \frac{x^4}{12} \neq -x^2 \,!!\right)$

Esercizio 3

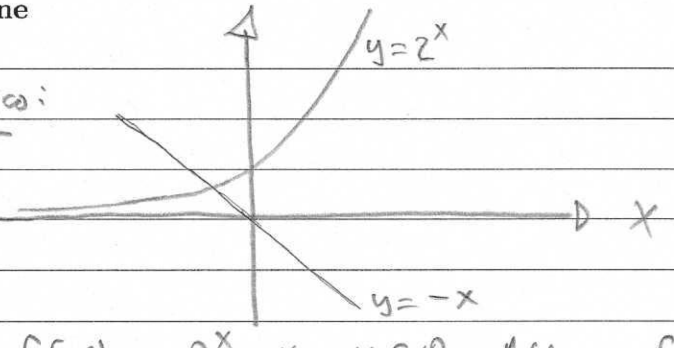
[3 punti]

L'equazione $2^x + x = 0$ $\Leftrightarrow$ $2^x = -x$

[a] non ha radici in $\mathbb{R}$ [b] ha una sola radice in $\mathbb{R}$ [c] ha più di una radice in $\mathbb{R}$ [d] è irriducibile

Risoluzione

Grafico:



Dal grafico si vede che l'equazione ammette un'unica radice.

Ciò si dimostra così:

Sia $f(x) := 2^x + x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora f è continua e

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ con $f(c) = 0$. Inoltre f è derivabile con

teorema degli zeri

$f'(x) = \ln(2)\cdot 2^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è strett. crescente $\Rightarrow f$ è iniettiva

$\Rightarrow c$ è unica.

Esercizio 4 $\quad 3/2$ **[4 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}+1-\sqrt{x}-2\cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t+1-t-2\cos(t)}{t^2}$$

Risoluzione

Poniamo $\sqrt{x}=t$. Allora $x\to 0^+ \iff t\to 0^+$. Inoltre vale per $t\to 0$:

$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$, $2\cos t = 2\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right) = 2-t^2+o(t^2)$

$\Rightarrow \frac{e^t+1-t-2\cos t}{t^2} = \frac{\cancel{1}+\cancel{t}+\frac{t^2}{2}+\cancel{1}-\cancel{t}-\cancel{2}+t^2+o(t^2)}{t^2} =$

$\frac{\frac{3}{2}t^2+o(t^2)}{t^2} = \frac{3}{2}+\frac{o(t^2)}{t^2} \to \frac{3}{2}$ per $t\to 0^+$

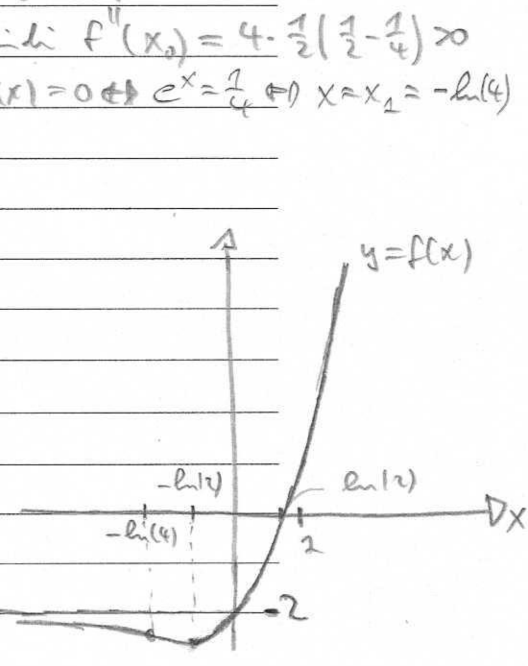
Esercizio 5 **[4 punti]**

Studiare la funzione $f(x)=e^{2x}-e^x-2$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: tutto $\mathbb{R}$
- simmetrie: no $\qquad t=e^x>0\ \forall x$
- intersez. assi: $x=0$: $f(0)=-2$, $y=0$: $e^{2x}-e^x-2 = t^2-t-2 \overset{!}{=} 0$
  $\iff t=t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}= \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$. $t=-1<0$ è impossibile,
  quindi $t=2 \iff x=\ln(t)=\ln(2)$ è l'unico zero di f.
- limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}(1-\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}-2\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0})=+\infty$.
- $f'(x)=2e^{2x}-e^x=2e^x\cdot\left(e^x-\frac{1}{2}\right)$. Quindi $f'(x)=0 \iff e^x=\frac{1}{2}$
  $\iff x_0=\ln(1/2)=-\ln(2)$ è l'unico pto. critico di f.
- $f''(x)=4e^{2x}-e^x=4e^x\cdot\left(e^x-\frac{1}{4}\right)$. Quindi $f''(x_0)=4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)>0$
  $\Rightarrow x_0$ è un pto. di min. locale. Inoltre $f''(x)=0 \iff e^x=\frac{1}{4} \iff x=x_1=-\ln(4)$
  è l'unico p.to di flesso di f.

Grafico:



Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare la regione $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^3 \le y \le x^2\}$ e calcolare l'integrale doppio

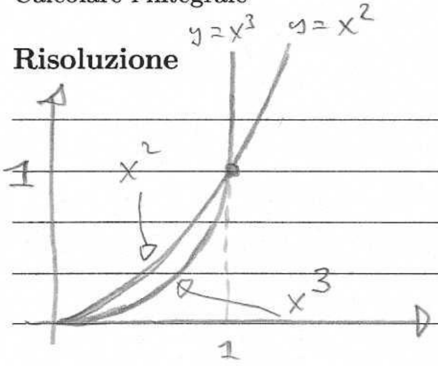
$$I_1 = \iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy.$$

In alternativa per i soli studenti immatricolati nel 2008/2009:

Calcolare l'integrale

$$\int_{e/2}^{e} \frac{1}{x \ln(x)}\, dx. = I_2$$

Risoluzione



- $x^3 \ge 0 \iff x \ge 0.$
- $x^3 = x^2 \iff x \cdot (x^2 - 1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{opp.} \\ x = 1 \end{cases}$

Quindi D è y-semplice:

$D = \{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ x^3 \le y \le x^2\}$

$\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{\Rightarrow} I_1 = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{xy}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} x^{1/2} \cdot y^{1/2}\, dy\, dx$

$= \int_0^1 x^{1/2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot y^{3/2} \Big|_{y = x^3}^{y = x^2} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{1/2} \cdot (x^3 - x^{9/2})\, dx$

$= \frac{2}{3} \int_0^1 x^{7/2} - x^5\, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{6} \right)$

$= \ldots = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$

$I_2 = \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| \Big|_{\ldots}^{\ldots}$ | Sost: $\ln(x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{x} \cdot dx$

$= \ln|\ln(x)| \Big|_{x = e/2}^{x = e} = \underbrace{\ln|\underbrace{\ln(e)}_{= 1}|}_{= 0} - \ln|\underbrace{\ln(\tfrac{e}{2})}_{> 0}|$

$= -\ln(\ln(\tfrac{e}{2})) = -\ln(\ln(e) - \ln(2))$

$= \underline{\underline{-\ln(1 - \ln(2))}}$