Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale: A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di dominio x-semplice.

(ii) Enunciare il teorema di Fubini–Tonelli per un dominio x-semplice.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) cfr. appunti

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare le Regole di de l'Hospital.

(ii) Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{x^3}$ $=: F(x)$

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) Il limite rappresenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è derivabile con $F'(x) = \sin(x^2)$.
Applicando l'Hospital segue

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{3\,x^2} = \frac{1}{3}$$

$\to 1$

NB: NON si può calcolare questo integrale!!

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot (1 - a_n)$

[a] non converge [b] converge assolutamente [~~c~~] converge [d] è oscillante

Risoluzione

$1 - a_n = 1 - \frac{(n+1+1)-1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$ è decrescente e infinitesima, quindi per Leibniz la serie converge. Inoltre $(1-a_n) \sim \frac{1}{n}$, quindi la serie non converge assolutamente.

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \cdot f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

[a] esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) = 0$

[~~b~~] $f(x) = 0$ per ogni $x \geq 0$

[c] esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(c) = 0$

[d] $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$

Risoluzione

$f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} (f^2(x))' \leq 0 \ \forall x$ per ipotesi $\Rightarrow$ f^2 è decrescente. Inoltre, $f^2(x) \geq 0 \ \forall x$ e $f^2(0) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0 \ \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \geq 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 6x - 3y & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

Allora

[a] $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste [b] $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -3$ [~~c~~] $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ [d] nessuna della precedenti

Risoluzione

Per definizione vale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - \frac{\sinh(x)}{x}}{\ln(1+x^2)} = -\frac{14}{3}$$

Risoluzione

- $\ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ si deve sviluppare il numeratore fino al 2° ordine:
- $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow (t = 3x)$ $\cos(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$
- $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \frac{\sinh(x)}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \Rightarrow$

$$\cos(3x) - \frac{\sinh(x)}{x} = 1 - \frac{9}{2}x^2 - 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

$$= -\frac{14}{3}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{14}{3}x^2.$$

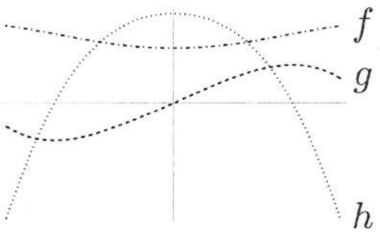
Quindi per il principio di sostituzione segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - \frac{\sinh(x)}{x}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{14}{3}\cdot x^2}{x^2} = -\frac{14}{3}$$

Esercizio 5

[4 punti]

In figura sono tracciati i grafici di una funzione u e delle sue derivate u' e u''. Allora



- [a] $h = u,\ g = u'$ e $f = u''$
- [b] $f = u,\ g = u'$ e $h = u''$
- [c] $g = u,\ f = u'$ e $h = u''$
- [d] $f = u,\ h = u'$ e $g = u''$

Risoluzione

Nella figura sono disegnati i grafici di 2 funzioni pari f e h e di una funzione dispari g. Ora vale:

- u dispari $\Rightarrow$ u' pari $\Rightarrow$ u'' dispari, cioè due funz. dispari una pari $\Rightarrow$ non compatibile. Quindi deve essere
- u pari $\Rightarrow$ u' dispari $\Rightarrow$ u'' pari, cioè due funz. pari una, u', dispari.

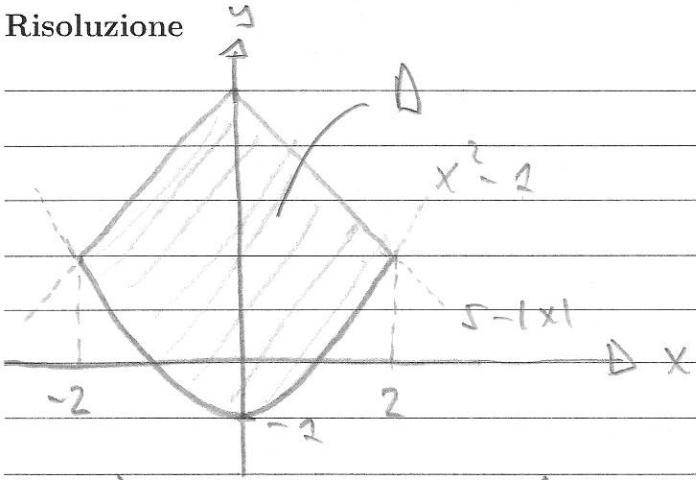
$\Rightarrow$ $u' = g$. Inoltre $u'(x) = g(x) > 0$ per $x > 0$ $\Rightarrow$ u crescente per $x > 0$. Visto che solo f è crescente per $x > 0$ mentre h è decrescente segue $u = f$, $u'' = h$.

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le 5 - |x|\}$ e calcolare la sua misura $|D|$.

Risoluzione



Per calcolare i pti. di intersezioni risolviamo l'equazione

$$x^2 - 1 = 5 - |x| \iff x = \pm 2$$

Ciò implica che D è y-semplice:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2,2],\ x^2-1 \le y \le 5-|x|\}$$

Quindi con Fubini-Tonelli segue

$$|D| = \iint_D 1 \, dx\,dy = \int_{-2}^{2} \int_{x^2-1}^{5-|x|} 1 \, dy\,dx$$

per simmetria

$$= 2 \cdot \int_0^2 \int_{x^2-1}^{5-x} 1 \, dy\,dx = 2 \cdot \int_0^2 (5 - x - x^2 + 1)\,dx$$

$$= 2\left(5x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2$$

$$= 2 \cdot \left(10 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 2\right)$$

$$= \frac{44}{3}$$