Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 19.7.11

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di dominio y-semplice.

(ii) Enunciare il teorema di Fubini–Tonelli per un dominio y-semplice.

Risposta

(i)

cfr. appunti

(ii)

cfr. appunti

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare le Regole di de l'Hospital.

(ii) Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sinh(t^2)\,dt}{x^3}$

Risposta

(i)

cfr. appunti

(ii) Utilizzando il teorema fondamentale e l'Hospital segue (ragionando come nel compito A) che il limite $= \frac{1}{3}$

N.B: Non si può calcolare l'integrale $\int_0^x \sinh(t^2)\,dt$!!

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $a_n = \frac{n+2}{n+1}$. Allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot (a_n - 1)^n}_{=: b_n}$

~~a~~ converge b non converge assolutamente c diverge d è oscillante

Risoluzione

$b_n = |(-1)^n \cdot (a_n - 1)^n| = \left(\frac{(n+1)+1}{n+1} - 1\right)^n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$. Quindi

$\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{n+1} \to 0 = q < 1 \Rightarrow$ la serie converge

(assolutamente).

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \cdot f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

a esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(c) = 0$ b $f(x) = 0$ per ogni $x \geq 0$

c esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(c) = 0$ ~~d~~ $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$

Risoluzione

$f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}(f^2(x))' \geq 0 \ \forall x \Rightarrow f^2(x)$ è crescente.
Inoltre $f^2(x) \geq 0 \ \forall x$ e quindi $f^2(x) = 0 \ \forall x \leq 0$
$\Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \leq 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = 0 \\ 6x - 3y & \text{se } y \neq 0 \end{cases}$
Allora

a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste ~~b~~ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ c $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 6$ d nessuna della precedenti

Risoluzione

Per definizione vale

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(2x) - \frac{\sin(x)}{x}}{\ln(1+x^2)}$$

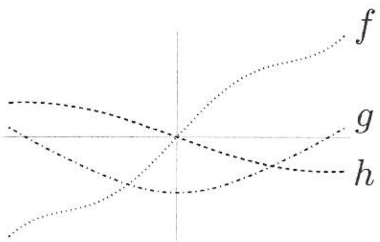
Risoluzione

Ragionando come nel compito A segue che il limite $= \frac{13}{6}$

Esercizio 5

[4 punti]

In figura sono tracciati i grafici di una funzione u e delle sue derivate u' e u''. Allora



- $\boxed{\text{a}}$ $h = u,\ g = u'$ e $f = u''$
- $\boxed{\text{b}}$ $f = u,\ g = u'$ e $h = u''$
- $\boxed{\text{c}}$ $g = u,\ f = u'$ e $h = u''$
- $\boxed{\text{d}}$ $f = u,\ h = u'$ e $g = u''$

Risoluzione

Nella figura sono disegnati i grafici di 2 funzioni dispari e di una funzione pari. Ora vale
- u pari $\Rightarrow$ u' dispari $\Rightarrow$ u'' pari : non possibile
- u dispari $\Rightarrow$ u' pari $\Rightarrow$ u'' dispari : OK

Quindi $u' = g$ e $u'(x) = g(x) < 0$ per x vicino a $0 \Rightarrow$ u è decrescente per x vicino a $0 \Rightarrow$

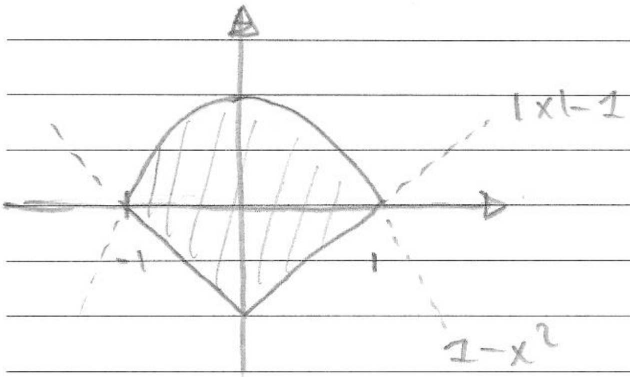
$u = h$ e $u'' = f$.

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \geq y \geq |x| - 1\}$ e calcolare la sua misura $|D|$.

Risoluzione



Per calcolare i pti. di intersezione risolviamo l'equazione

$1-x^2 = |x|-1 \iff x = \pm 1$

Quindi D è y-semplice:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ |x|-1 \leq y \leq 1-x^2\}$$

$\Rightarrow$ (con Fubini-Tonelli)

$$|D| = \iint_D 1 \, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{|x|-1}^{1-x^2} 1 \, dy\, dx$$

per simmetria

$$\overset{\text{per simmetria}}{=} 2 \cdot \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x^2} 1 \, dy\, dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 (1-x^2-x+1)\, dx$$

$$= 2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right)\Big|_0^1$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) = \underline{\underline{7/3}}$$