Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **19.2.24**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione decrescente

(ii) Descrivere i possibili comportamenti al infinito di una successione decrescente

Risposta

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente se $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente è sempre regolare, cioè ammette limite ℓ.
Tale limite ℓ è finito, cioè la successione converge, se e solo se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, cioè $\exists M \geq 0$ t.c. $|x_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata, allora $\ell = +\infty$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

(ii) Calcolare l'equazione della retta tangente t al grafico della funzione $F(x) = \pi - \int_1^x e^{2t^2-1} dt$ nel punto $x_0 = 1$

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita come

$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile con $F'(x) = f(x) \ \forall x \in (a,b)$.

(ii) • $t(x) = F(x_0) + F'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

• $F(x_0) = \pi + \int_1^1 e^{2t^2-1} dt = \pi + 0 = \pi$; $f(x) = e^{2x^2-1}$ è continua $\overset{i)}{\Rightarrow}$

$F'(x_0) = 0 - f(x_0) = -e^{2\cdot 1^2 - 1} = -e \Rightarrow$ $\underline{\underline{t(x) = \pi - e\cdot(x-1)}}$.

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot (1 - \sqrt[n]{2})^n \quad =: a_n$$

Risoluzione

Applicando il criterio della radice usando i limiti notevoli $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$

risulta:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{\to 1} \cdot \overbrace{|1 - \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}|}^{\to |1-1| = 0} \to 1 \cdot 0 = 0 = q < 1$$

Quindi S converge assolutamente e di conseguenza anche semplicemente.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - \frac{\sinh(x)}{x}}{1 - \cos(x)} =: \ell$$

Risoluzione

- Denominatore: $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$
- Numeratore: Da sviluppare fino al 2° ordine:
  - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$
  - $\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$ — " —
  - $\frac{\sinh(x)}{x} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ per $x \to 0$

Quindi $e^x + \ln(1-x) - \frac{\sinh(x)}{x} = \cancel{1} \cancel{+x} \cancel{+\frac{x^2}{2}} \cancel{-x} \cancel{-\frac{x^2}{2}} \cancel{-1} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

$$= \frac{-x^2}{6} + o(x^2) \sim \frac{-x^2}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2/6}{x^2/2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il gradiente grad $f(x_0, y_0)$ della funzione $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{y}$ nel punto $(x_0, y_0) = (3, -2)$

Risoluzione

- $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^{1/2}}{y}$.

- $f_x(x,y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \Rightarrow$

$f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{2}(3-2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$

- $f_y(x,y) = \dfrac{y \cdot \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} \cdot 1 - 1 \cdot (x+y)^{1/2}}{y^2} \Rightarrow$

$f_y(x_0,y_0) = \dfrac{-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3-2)^{-1/2} - (3-2)^{1/2}}{(-2)^2} = \dfrac{-1-1}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cdot (e^y - 1)}{x^4 + 2y^4} - 3\sin(x) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- Ponendo $y = x$ segue

$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x^3}^{\,1} \cdot (e^x - 1)}{\cancel{x^4}^{\,1} + 2\cancel{x^4}^{\,1}} - \underbrace{3\sin(x)}_{\to 0}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{(1+2) \cdot x} = \frac{1}{3} \neq f(0,0) = 0$ ($\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$)

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$

- $f(h,0) = -3\sin(h)$, $f(0,h) = 0$

- $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-3\sin(h) - 0}{h} = -3 = f_x(0,0)$

- $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0 = f_y(0,0)$

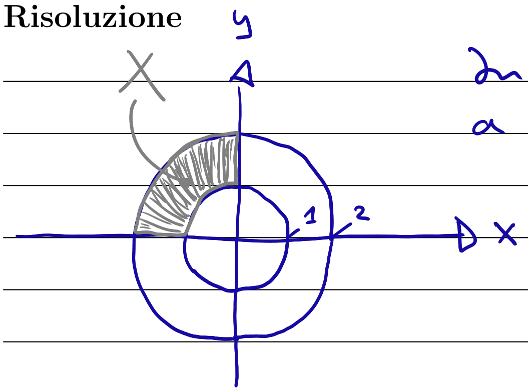
$\Rightarrow$ f è derivabile in $(0,0)$ con $\text{grad } f(0,0) = (-3, 0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare il dominio $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq 0 \leq y\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \frac{x^2 \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

Risoluzione



In coordinate polari X corrisponde a $X' = \{(\rho, \vartheta) \mid \rho \in [1,2],\ \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\}$
$= [1,2] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Passando alle coordinate polari $x = \rho \cdot \cos\vartheta$
$y = \rho \cdot \sin\vartheta$ segue

$$I = \int_{\rho=1}^{2} \int_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\rho^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \rho \cdot \sin\vartheta}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho}\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho^3\, d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta$$

Sost: $\cos\vartheta = t \Rightarrow \frac{dt}{d\vartheta} = -\sin\vartheta \Rightarrow$

$\cdot\ \sin\vartheta \cdot d\vartheta = -dt$

$\cdot\ \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\cdot\ \vartheta = \pi \Rightarrow t = \cos(\pi) = -1$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \int_0^{-1} t^2 \cdot (-dt)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [2^4 - 1] \cdot \left[\frac{-t^3}{3}\right]_0^{-1} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{4} \cdot \frac{-(-1)^3}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{5}{4}$$