Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 19.02.2020

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata.

(ii) Dare un esempio di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente e limitata. Dire se per tale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste un limite finito o infinito.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata se $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c.

$m \le a_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e limitata.

Ogni successione monotona e limitata converge, in particolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità in $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dare la definizione di limitatezza per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fornire un esempio di funzione limitata e un esempio di funzione illimitata.

Risposta

(i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii) • $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata se $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c.

$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

• $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$ è illimitata

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n}}_{=:a_n}$$

Risoluzione

- $a_n = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{\cancel{n}+3-\cancel{n}}{n\cdot(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}$

$= \frac{3}{n\cdot\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}+1\right)} \sim \frac{3}{2\cdot n^{3/2}}$ per $n\to+\infty$

- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Quindi per il criterio asintotico del confronto anche S converge

Esercizio 2

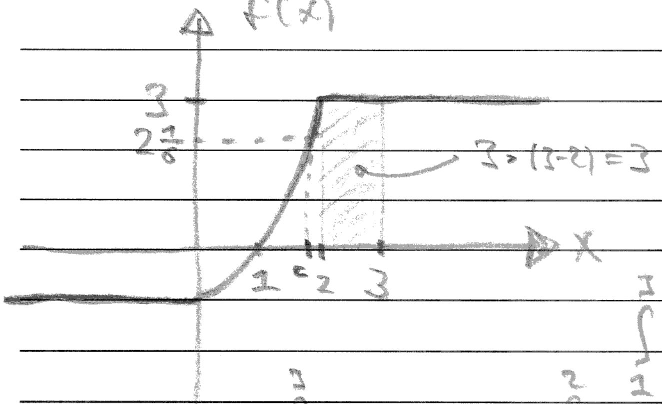
[6 punti]

Dopo aver disegnato il grafico della funzione

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x \le 0, \\ x^2-1 & \text{se } 0 < x < 2, \\ 3 & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$$

stabilire se esiste un punto $c \in [1,3]$ tale che $\int_1^3 f(x)dx = 2f(c)$. In caso affermativo, determinare c.

Risoluzione



f è continua. Quindi per il teorema della media integrale $\exists\, c\in[1,3]$ t.c.

$\int_1^3 f(x)\,dx = (3-1)\cdot f(c) = 2\cdot f(c)$

Inoltre, $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \underbrace{\int_2^3 f(x)\,dx}_{\equiv 3}$

$= \int_1^2 x^2-1\,dx + 3 = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 + 3 = \frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1+3 = \frac{7}{3}+2$

$= \frac{13}{3} \overset{!}{=} 2f(c) \iff \underset{c^2-1}{\underset{\parallel}{f(c)}} = 13/6 = 2\frac{1}{6}$

$\Rightarrow c^2 = \frac{13}{6}+1 = \frac{19}{6} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{19}{6}}$

Esercizio 3

[5 punti]

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(*) \qquad x^5 + e^x - 100 = 0$$

Risoluzione

Definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^5 + e^x - 100$

Allora:
- f è continua
- $f(0) = 0^5 + e^0 - 100 = -99 < 0$
- $f(10) = 10^5 - 10^2 + e^{10} > 0$

$\Rightarrow$ (per il teorema degli zeri) f ammette uno zero $c \in [0, 10]$, cioè $(*)$ ha almeno una soluzione.

Inoltre, $f'(x) = x^4 + e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi f è strettamente crescente e di conseguenza iniettiva.

$\Rightarrow$ f ammette al più uno zero $\Rightarrow$ $(*)$ ha un'unica soluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} =: \ell$$

Risoluzione

$$\left| \frac{y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{y^3}{y^2} \right| = |y| \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

Quindi $\ell = 0$.

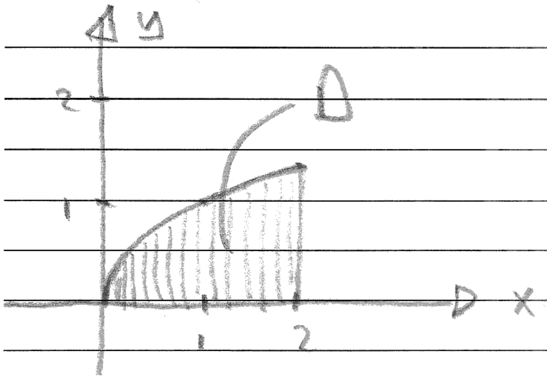
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \underbrace{20\,x^3 y}_{= f(x,y)}\,dx\,dy.$$

Risoluzione



- $f : D \to \mathbb{R}$ è continua
- D è y-semplice

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue:

$$I = \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} 20x^3 \cdot y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[\cancel{20}^{\,10} \cdot x^3 \cdot \frac{y^2}{\cancel{2}} \right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= 10 \cdot \int_0^2 \underbrace{x^3 (x - 0)}_{= x^4} dx = 10 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = 2 \cdot (2^5 - 0^5)$$

$$= 2^6 = 64$$