Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di continuità in $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di una funzione f che *non* è continua in $x_0 = e$.

Risposta

(i) f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$ segue $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \to +\infty$

Oppure $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \; \forall x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta$.

(ii) Per esempio la funzione di Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

è discontinua in $x_0 = e$, visto che è discontinua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il metodo di integrazione per parti in versione definita.

(ii) Calcolare l'integrale $\int_1^e x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = I$

Risposta

(i) Se $f, g \in C^1[a,b]$, allora

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

(ii) Visto che $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ segue

$$I = -\left(\int_1^e \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx \right) = -\left(\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g} \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}_{f \cdot g'}\, dx \right)$$

$$= -\left(\frac{e^2}{2} \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e \right)$$

$$= -\frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$$

Esercizio 1 $=: a_n$ [3 punti]

L'insieme $A = \left\{ \frac{n+1}{n+2} \,\middle|\, n = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$

[a] è limitato e non ha minimo [b] non è limitato

[c] ha minimo e massimo [X] [d] è limitato e non ha massimo

Risoluzione

$a_n = \frac{n+1+1-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$ è crescente. Quindi

$\min A = a_0 = \frac{1}{2}$, $\sup A = \lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \notin A \Rightarrow$

$\max A$ <u>non</u> esiste

Esercizio 2 [3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(-1) = 1$ e $f(1) = -1$. Allora

[a] $f(x) = -x$ [b] f è decrescente [X] [c] $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = -1$ [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

Sia $a=-1$, $b=1$. Allora per il <u>teorema di Lagrange</u>
$\exists x \in [-1,1]$ t.c.

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{= f'(x)} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{-1-(-1)}{2} = 1$$

Esercizio 3 [3 punti]

La derivata parziale $f_y(0,0)$ della funzione $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

[a] vale 0 [X] [b] vale 1 [c] vale -1 [d] non esiste

Risoluzione

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overset{x}{0},h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = \underline{\underline{1}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

Risoluzione

Il limite si può calcolare con Taylor oppure così:

$$\frac{\sin(\sin(x)) - x}{x^3} = \frac{\sin(\sin(x)) - \sin(x) + \sin(x) - x}{x^3}$$

$$= \frac{\sin(\sin(x)) - \sin(x)}{\sin^3(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^3}_{\to 1 \text{ per } x \to 0}} + \underbrace{\frac{\sin(x) - x}{x^3}}_{\to -\frac{1}{6} \text{ per } x\to 0}$$

$$\sim \frac{\sin(\overbrace{\sin(x)}^{=t\to 0}) - \overbrace{\sin(x)}^{=t}}{\underbrace{\sin^3(x)}_{=t^3}} - \frac{1}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\to -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \text{ per } x \to 0 \; (\Rightarrow t \to 0)$$

Esercizio 5

[4 punti]

In quale punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il piano $z = 2 + x - y$ è tangente al grafico di $f(x, y) = 1 + xy$?

Risoluzione

L'equazione del piano tangente nel pto. (x_0, y_0) è

$$p(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=1+x_0y_0} + \underbrace{f_x(x_0,y_0)}_{=y_0}\cdot(x-x_0) + \underbrace{f_y(x_0,y_0)}_{=x_0}\cdot(y-y_0)$$

$$= 1 + \cancel{x_0 y_0} + y_0(x - \cancel{x_0}) + x_0\cdot(y-y_0)$$

$$= (1 - x_0y_0) + y_0\cdot x + x_0 \cdot y$$

$$\stackrel{!}{=} 2 + x - y = 2 + 1\cdot x + (-1)\cdot y_0$$

Confrontando i coefficienti segue $y_0 = 1$, $x_0 = -1$

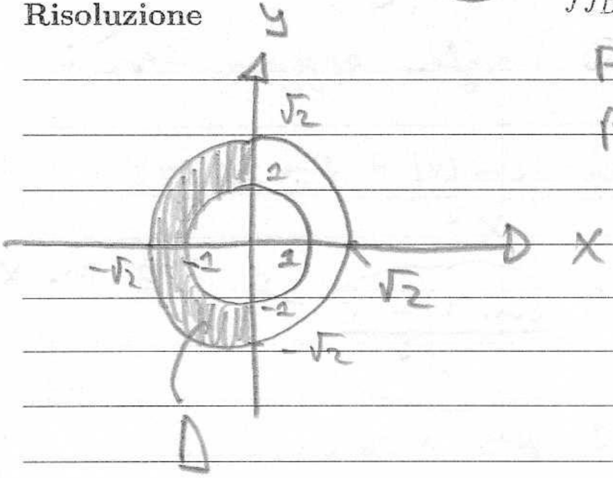
$\Rightarrow 1 - x_0 \cdot y_0 = 2$. Quindi $\underline{(x_0, y_0) = (-1, 1)}$

Esercizio 6 [5 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ x \le 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D x \cdot y^2 \, dx\, dy$$

Risoluzione



Per calcolare I conviene passare alle coordinate polari:

D espresso in coord. polari corrisponde a

$$D' = \{(\rho, \vartheta) \mid \rho \in [1, \sqrt{2}],\ \vartheta \in [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{2}\pi]\}$$

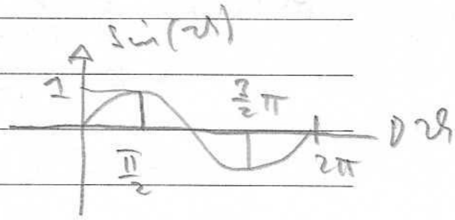
$$= [1, \sqrt{2}] \times [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{2}\pi].$$ Quindi risulta

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \overbrace{\rho \cdot \cos(\vartheta)}^{=x} \cdot \overbrace{\rho^2 \cdot \sin^2(\vartheta)}^{=y^2} \cdot \rho \cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^4 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(\vartheta) \cdot \sin^2(\vartheta)\, d\vartheta$$

(sost. $t = \sin(\vartheta)$)

$$= \frac{\rho^5}{5}\Big|_1^{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$



$$= \frac{(\sqrt{2})^5 - 1}{5} \cdot \frac{\sin^3(\frac{3}{2}\pi) - \sin^3(\frac{\pi}{2})}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^4 - 1}{5} \cdot \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4 - 1}{5} \cdot \frac{-2}{3}$$

$$= \frac{2 - 8 \cdot \sqrt{2}}{15}.$$