Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 11.2.11

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

I	
I	
I	
I	
E	
E	
E	
E	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di continuità in $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di una funzione f che *non* è continua in $x_0 = \pi$.

Risposta

(i) Cfr. capitolo 1-A

(ii) cfr. capitolo 1-A

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il metodo di integrazione per parti in versione definita.

(ii) Calcolare l'integrale $\int_1^e x \cdot \ln(x^2)\, dx = I$

Risposta

(i) Cfr. capitolo 1-A

(ii) Visto che $\ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x)$ segue

$$I = 2 \cdot \left(\int_1^e x \cdot \ln(x)\, dx \right) = \ldots = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}(e^2+1) \right)$$

cfr. capitolo 1-A

$$= \frac{e^2+1}{2}$$

Esercizio 1

[3 punti]

L'insieme $A = \left\{ \frac{n+2}{n+1} \;\middle|\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \right\}$ $= a_n$

- [a] non è limitato
- [b] è limitato e non ha massimo
- [c] è limitato e non ha minimo ✗
- [d] ha minimo e massimo

Risoluzione

$a_n = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ è decrescente. Quindi

$\max A = a_0 = 2$, $\inf A = \lim_{n \to +\infty} a_n = 1 \notin A \Rightarrow$

$\min A$ <u>non</u> esiste

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$. Allora

- [a] f è crescente
- [b] $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 1$ ✗
- [c] $f(x) = x$
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

Sia $a = -1$, $b = 1$. Allora per il teorema di Lagrange $\exists\, x \in [-1, 1]$ t.c.

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{= f'(x)} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

Esercizio 3

[3 punti]

La derivata parziale $f_x(0, 0)$ della funzione $f(x, y) = \begin{cases} -x & \text{se } y = 0 \\ y & \text{se } y \neq 0 \end{cases}$

- [a] vale -1 ✗
- [b] vale 1
- [c] vale 0
- [d] non esiste

Risoluzione

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, \overset{y}{0}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h}$$

$$= -1$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\sinh(x)) - x}{x^3}$$

Risoluzione

Sol. con Taylor oppure così:

$$\frac{\sinh(\sinh(x)) - x}{x^3} = \frac{\sinh(\sinh(x)) - \sinh(x) + \sinh(x) - x}{x^3}$$

$= t \to 0$ per $x \to 0$

$$= \frac{\sinh(\underbrace{\sinh(x)}_{=t}) - \sinh(x)}{\underbrace{\sinh^3(x)}_{t^3} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\sinh(x)}\right)^3}_{\to 1^3 = 1}} + \underbrace{\frac{\sinh(x) - x}{x^3}}_{\to \frac{1}{6}}$$

$$= \to \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 5

[4 punti]

In quali punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il piano $z = 2 + x + y$ è tangente al grafico di $f(x,y) = 1 - xy$?

Risoluzione

Ragionando come nel compito 1-A

segue che $(x_0, y_0) = (-1, -1)$

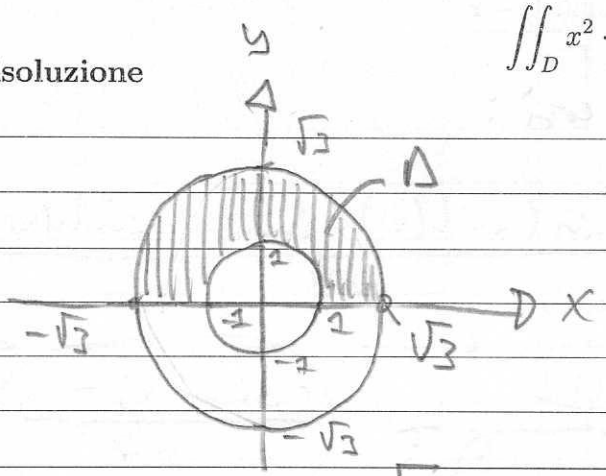
Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3,\ y \geq 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x^2 \cdot y \, dx \, dy = I$$

Risoluzione



Ragionando come nel compito 1-A segue

$D = [1, \sqrt{3}] \times [0, \pi]$

e $\quad I = \int_1^{\sqrt{3}} \rho^4 \cdot d\rho \cdot \int_0^{\pi} \cos^2(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \, d\vartheta$

$$= \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_1^{\sqrt{3}} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{(-\cos(\vartheta))^2}_{= f^2} \cdot \underbrace{\sin(\vartheta)}_{= f'} \, d\vartheta$$

$\int f^2 \cdot f' = \frac{f^3}{3} + c$

$$= \frac{9 \cdot \sqrt{3} - 1}{5} \cdot \left(\left. - \frac{\cos^3(\vartheta)}{3} \right|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{9 \cdot \sqrt{3} - 1}{5} \cdot \frac{-(-1-1)}{3}$$

$$= \frac{18\sqrt{3} - 2}{15}$$