Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di estremo superiore per un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di un sottoinsieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ che ha estremo superiore, ma non massimo.

Risposta

(i) $S_0 = \sup D \iff S_0$ è il più piccolo maggiorante di D

$$\iff \begin{cases} x \leq S_0 \quad \forall x \in D, \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in D \text{ t.c. } S_0 - \varepsilon < x \end{cases}$$

(ii) $\mathbb{N}$ stesso: $\sup \mathbb{N} = +\infty \notin \mathbb{N}$, quindi $\max \mathbb{N}$ non esiste

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Lagrange.

(ii) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 di $f(x) = \ln(\cos(x))$ in $x_0 = 0$.

Risposta

(i) Sia $f \in C^{n+1}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$. Allora $\exists$ c tra x e x_0 t.c.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{= \text{resto di Lagrange}}$$

(ii) $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$t = \cos(x) - 1 \longrightarrow$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + \underbrace{o\big((\overbrace{\cos(x)-1}^{\sim -\frac{x^2}{2}})^2\big)}_{= o(x^4)}$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$T_4(x) = \quad = \boxed{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}} + o(x^4) = \ln(\cos(x))$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x \to \pm\infty} x \cdot f(x) = 0$. Allora

[a] f non ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}$ — [b] f é monotona crescente

[X] $f(x) = o(1/x)$ per $x \to \pm\infty$ — [d] $f(x) \sim e^{-x}$ per $x \to \pm\infty$

Risoluzione

$\lim_{x \to \pm\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{1/x} = 0 \iff f(x) = o(1/x)$ per $x \to \pm\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

Posto $a_n = \ln(1 + 1/n)$, $b_n = \ln(1 - 1/n)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

[a] diverge a $+\infty$ — [X] converge — [c] oscilla — [d] diverge a $-\infty$

Risoluzione

$a_n + b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$\sim \frac{-1}{n^2} \quad (n \to +\infty)$

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ converge

criterio del confronto asintotico

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ di f in $(0,0)$ é una funzione *non* lineare di $v = (v_1, v_2)$. Allora

[a] f non é continua in $(0,0)$ — [b] f non é derivabile in $(0,0)$

[c] $f(0,0) = 0$ — [X] f non é differenziabile in $(0,0)$

(Sugg.: Utilizzare il Teorema del Gradiente)

Risoluzione

Se f è differenziabile, allora

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \text{grad} f(0,0) \cdot v$ è lineare in v.

Quindi f non può essere differenziabile.

Esercizio 4

[4 punti]

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{e^n + 3n} =: a_n$$

Risoluzione

$$|a_n| \leq \frac{1}{e^n+3n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n =: q^n \quad \text{con } |q| < 1, \quad q = 1/e$$

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (assolutamente)

criterio del confronto

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x) + \frac{\sin(x)}{x} - e^{-x}}{x^\alpha} =: \ell$$

sia diverso da 0.

Risoluzione

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) + \frac{\sin(x)}{x} + e^{-x} =$$

$$\cancel{-x} - \frac{x^2}{2} \cancel{+1} - \frac{x^2}{6} \cancel{-1} \cancel{+x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= -\frac{7}{6}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{7}{6}x^2.$$ Quindi per il principio di sostituzione segue

$$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{7}{6}x^2}{x^\alpha} = -\frac{7}{6} \lim_{x \to 0} x^{2-\alpha}.$$

Questo limite esiste finito $\neq 0 \iff 2 - \alpha = 0$

$\iff \boxed{\alpha = 2}$

Esercizio 6 [5 punti]

Calcolare

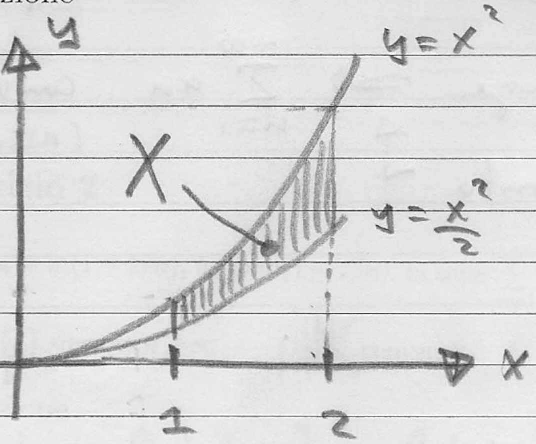
$$I = \iint_X \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$$

ove $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2],\ \frac{x^2}{2} \le y \le x^2\}$.

~~(In alternativa per i soli studenti immatricolati nel 2008/2009:~~

~~Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^3y^3 + 3(x^2+y^2)$)~~

Risoluzione



X è y-semplice, quindi per Fubini-Tonelli segue:

$$I = \int_1^2 \int_{x^2/2}^{x^2} \frac{x}{y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{x}{y}\Big|_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=x^2} \right) dx = -\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(2) - \ln(1) = \underline{\underline{\ln(2)}}$$