Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **1.2.10**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{E-A}}$ $\boxed{\text{08/09}}$

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di estremo superiore per un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di un sottoinsieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ che ha estremo superiore, ma non massimo.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Lagrange.

(ii) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 di $f(x) = \ln(\cos(x))$ in $x_0 = 0$.

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x\to\pm\infty} x \cdot f(x) = 0$. Allora

$\boxed{\text{a}}$ f non ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ f é monotona crescente

$\boxed{\text{c}}$ $f(x) = o(1/x)$ per $x \to \pm\infty$

$\boxed{\text{d}}$ $f(x) \sim e^{-x}$ per $x \to \pm\infty$

Risoluzione

Esercizio 2

[3 punti]

Posto $a_n = \ln(1 + 1/n)$, $b_n = \ln(1 - 1/n)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

$\boxed{\text{a}}$ diverge a $+\infty$

$\boxed{\text{b}}$ converge

$\boxed{\text{c}}$ oscilla

$\boxed{\text{d}}$ diverge a $-\infty$

Risoluzione

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ di f in $(0,0)$ é una funzione *non* lineare di $v = (v_1, v_2)$. Allora

$\boxed{\text{a}}$ f non é continua in $(0,0)$

$\boxed{\text{b}}$ f non é derivabile in $(0,0)$

$\boxed{\text{c}}$ $f(0,0) = 0$

$\boxed{\text{d}}$ f non é differenziabile in $(0,0)$

(Sugg.: Utilizzare il Teorema del Gradiente)

Risoluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{e^n + 3n}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) + \frac{\sin(x)}{x} - e^{-x}}{x^\alpha}$$

sia diverso da 0.

Risoluzione

Esercizio 6 **[5 punti]**

Calcolare

$$\iint_X \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$$

ove $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x \in [1,2],\, \frac{x^2}{2} \le y \le x^2\right\}$.

(<u>In alternativa per i soli studenti immatricolati nel 2008/2009:</u>

Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^3y^3 + 3(x^2+y^2)$)

Risoluzione