2.2.21

Domanda 1

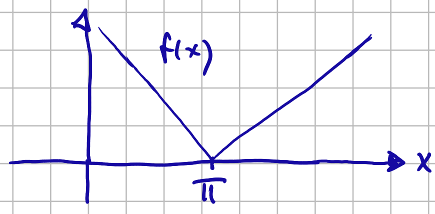
[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità in $x = x_0$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio (anche grafico) di una funzione continua ma non derivabile in $x_0 = \pi$.

i) f è continua in $x = x_0$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

ii) Per esempio $f(x) = |x-\pi|$, $x\in\mathbb{R}$:



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Calcolare un punto di Lagrange della funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x + 1$.

i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b), allora esiste $c \in (a,b)$ (detto punto di Lagrange) tale che

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ii) • $f \in C[0,3]$ è derivabile con $f'(x) = 3x^2 - 1$.

• $f(0) = 1$, $f(3) = 3^3 - 3 + 1 = 25 \Rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{25-1}{3} = 8$

• $f'(c) = 8 \Leftrightarrow 3\cdot c^2 - 1 = 8 \Rightarrow c^2 = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$

Visto che $c \in (0,3)$ segue $c = +\sqrt{3}$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{\left(\sqrt{n^4 - 3n^2 + 2} - n^2\right)}^{=:a_n} =: \ell$$

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^4-3n^2+2} - n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^4-3n^2+2} + n^2\right)}{\sqrt{n^4-3n^2+2} + n^2}$$

$$= \frac{(\cancel{n^4} - 3n^2 + 2) - (\cancel{n^2})^2}{n^2\cdot\left(\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}} + 1\right)} = \frac{-3 + \frac{2}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}} + 1} \to \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

$\frac{2}{n^2} \to 0$

$\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}} \to \sqrt{1} = 1$

per $n\to+\infty$

Cioè $\ell = -\frac{3}{2}$.

Esercizio 2

[~~3~~ 4 punti]

Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x \cdot e^{\sin(x)}$ in $x_0 = \pi$.

L'equazione della retta tangente è $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) =: t(x)$

per
- $x_0 = \pi$
- $f(x_0) = f(\pi) = \underbrace{\pi \cdot e^{\overbrace{\sin(\pi)}^{=0}}}_{= e^0 = 1} = \pi$
- $f'(x) = 1 \cdot e^{\sin(x)} + x \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \Rightarrow$

$f'(\pi) = \underbrace{e^{\sin(\pi)}}_{=1} + \pi \cdot \underbrace{e^{\sin(\pi)}}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} = 1 - \pi$

$\Rightarrow t(x) = \pi + (1-\pi)\cdot(x - \pi)$

$= (1-\pi)\cdot x + \pi^2$

Esercizio 3

[~~4~~ 5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_1^{e^2} \frac{\overbrace{\ln^2(x)}^{t^2}}{x}\, dx \qquad \frac{dx}{x} = dt$$

Sost. $\ln(x) = t \Rightarrow$
- $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$
- $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$

$x = e^2 \Rightarrow t = \ln(e^2) = 2$

Quindi $I = \int_0^2 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\cdot(2^3 - 0^3) = \frac{8}{3}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,4)$ di $f(x,y) = \underbrace{\sqrt{\frac{y}{x}}}_{x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}$ nella direzione $v = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

- $D_v f(1,4) = f_x(1,4)\cdot(-\frac{1}{2}) + f_y(1,4)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ se $f \in C^1$.
- $f_x(x,y) = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_x(1,4) = -\frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{3}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$
- $f_y(x,y) = x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f_y(1,4) = 1^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f \in C^1 \Rightarrow$ (per il teor. del gradiente) $D_v f(1,4) = -1\cdot(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

Esercizio 5 [6 punti]

Determinare il dominio, eventuali zeri, asintoti ed estremi locali di $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Dominio: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ il dominio di f. Allora $x \in X$

$\Leftrightarrow x^2 - x = x \cdot (x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ e $x \neq 1$

Quindi $X = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 =: x_1 \\ \frac{1-3}{2} = -1 =: x_2 \end{cases} \text{ zeri di } f(x)$$

Asintoti:

- $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}^{\to 1}}{\cancel{x^2} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{\to 1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to \pm\infty$.

- $$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\overbrace{x^2 - x - 2}^{\to -2}}{\underbrace{x}_{\to 0^{\pm}} \cdot \underbrace{(x-1)}_{\to -1}} = \frac{+2}{0^{\pm} \cdot (+1)} = \pm\infty.$$

$\Rightarrow x = 0$ è un asintoto verticale di f.

- $$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{\overbrace{x^2 - x - 2}^{\to 1 - 1 - 2 = -2}}{\underbrace{x}_{\to 1} \cdot \underbrace{(x-1)}_{\to 0^{\pm}}} = \frac{-2}{0^{\pm}} = \mp\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ è un asintoto verticale di f.

Estremi Locali:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x) \cdot (2x - 1) - (2x-1) \cdot (x^2 - x - 2)}{(x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{(\cancel{x^2} \cancel{- x} \cancel{- x^2} \cancel{+ x} + 2)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{2x - 1}{\underbrace{(x^2 - x)^2}_{> 0}}$$

Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Inoltre vale: segno $(f'(x)) = $ segno $(2x-1)$

e $2x-1$ cambia segno in $x = \frac{1}{2}$ da "−" a "+"

$\Rightarrow$ $x_0 := \frac{1}{2}$ è un punto di minimo locale

Grafico: