Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **2.2.22**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

Firma: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

(ii) Dire per quale $q \in \mathbb{R}$ e a quale somma $s \in \mathbb{R}$ converge la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Risposta

(i) Sia $S := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$ esiste, allora S converge se $q < 1$ e S diverge a $+\infty$ se $q > 1$.

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 = \pi$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente t al grafico di $f(x) = \ln\left(1 + e^{\sin(x)}\right)$ nel punto $x_0 = \pi$.

Risposta

(i) f è derivabile in $x_0 = \pi$ con derivata $f'(x_0)$ se converge il limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$

(ii) • $t(x) = f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x - x_0)$

• $f(\pi) = \ln(\underbrace{1 + e^{\overbrace{\sin(\pi)}^{=0}}}_{= e^0 = 1}) = \ln(2)$

• $f'(x) = \frac{1}{1+e^{\sin(x)}} \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \Rightarrow f'(\pi) = \frac{e^{\overbrace{\sin(\pi)}^{=1}} \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{=-1}}{\underbrace{1 + e^{\sin(\pi)}}_{=2}} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = \ln(2) - \frac{1}{2}(x - \pi)}}$

Esercizio 1 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x}{\sin(x)} - 1}{\cos(x) - 1} =: \ell$$

Risoluzione

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x-\sin(x)}{\sin(x)}}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{\underbrace{\sin(x)}_{\sim x}\cdot\underbrace{(\cos(x)-1)}_{\sim -\frac{x^2}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = -2\cdot \lim \frac{x-\sin(x)}{x^3}$$

$$= -2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3} = -2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6}{x^3}$$

$$= -2/6 = \underline{\underline{-1/3}}$$

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx$$

Risoluzione

Si utilizza la sostituzione $\sqrt{x} = t \iff x = t^2 \Rightarrow$

- $dx/dt = 2t \Rightarrow dx = 2t\, dt$
- $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{0} = 0$
- $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = 1$

Quindi risulta $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\, dt$

$$= 2\cdot \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt = 2\cdot \int_0^1 1 - \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= 2\cdot \Big[t - \arctan(t)\Big]_0^1$$

$$= 2\cdot\left(1 - \underbrace{\arctan(1)}_{=\pi/4} - 0 + \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right)$$

$$\underline{\underline{= 2 - \pi/2}}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per la funzione $f(x,y) = \frac{y}{x}$ e il versore $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Risoluzione

• f è C^1 quindi differenziabile. Per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(2,1) = f_x(2,1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + f_y(2,1) \cdot \frac{1}{2}$$

• $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y \cdot x^{-1}) = -y \cdot x^{-2} = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow f_x(2,1) = -\frac{1}{4}$

• $f_y(x,y) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_y(2,1) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow D_v f(2,1) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la derivabilità parziale nel punto $(x_0, y_0) = (0,1)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+x) \cdot y & \text{se } x \geq 0 \\ (1-x) \cdot y & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Risoluzione

• $f(x) = (1 + |x|) \cdot y$

• $\underline{\underline{f_x(0,1)}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(1+|h|) \cdot 1}^{=|h|+1} - \overbrace{(1+|0|) \cdot 1}^{=1}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ $\underline{\underline{\text{non esiste}}}$

• $\underline{\underline{f_y(0,1)}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(1+|0|) \cdot (1+h)}^{=1+h} - \overbrace{(1+|0|) \cdot 1}^{=1}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}^{1}}{\cancel{h}_{1}} = \underline{\underline{1}}$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x^3} = \frac{x^2-1}{x^3}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Simmetrie: x^2-1 è pari, x^3 è dispari $\Rightarrow$ f è dispari.

Quindi basta studiare $f(x)$ per $x > 0$.

Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$

Asintoti: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$: asintoto verticale $x = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x} = \frac{1-0}{+\infty} = 0$: asintoto orizzontale $y = 0$

Estremi Locali: Gli unici candidati sono i punti critici.

$$f'(x) = \frac{x^3 \cdot 2x - 3x^2 \cdot (x^2-1)}{(x^3)^2} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{3-x^2}{\underbrace{x^4}_{>0}} = 0$$

$\iff x = \pm\sqrt{3}$. Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in $x = \sqrt{3}$ da "+" a "−"

$\Rightarrow$ $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo locale

$\Rightarrow$ $x = -\sqrt{3}$ è un pto di minimo locale

↑ (f è dispari)

Grafico: