## Domanda 1 [4 punti]

2.3.21

(i) Dare la definizione di massimo di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Verificare se la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := \dfrac{\ln(x^3 + \pi) - \sinh(x)}{\sqrt{2 + \cos(x)}}$ ammette massimo.

Sol: i) $\max f := \max \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$.

ii) La funzione $f$ è una composizione di funzioni continue, quindi continua. Inoltre $[0,\pi]$ è un intervallo chiuso e limitato, quindi $f$ ammette massimo per il teorema di Weierstraß.

---

## Domanda 2 [4 punti]

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Trovare gli intervalli di crescenza della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := \int_1^x (t^2 + t - 2) \cdot e^{t^2} dt$

Sol: i) Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) := \int_a^x g(t)\, dt \quad , \quad x \in [a,b]$$

è derivabile con

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

ii) • $g(x) := (x^2 + x - 2) \cdot e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ è continua, quindi per il teorema fondamentale $f$ è derivabile con

$$f'(x) = (x^2 + x - 2) \cdot e^{-x^2}$$

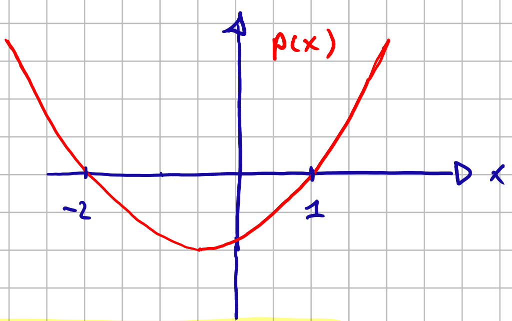
poiché $e^{-x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

• $f$ è crescente $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + x - 2 =: p(x) \geq 0$

• $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Quindi graficamente segue

$p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ opp. $x \geq 1$.




Così risulta: $f$ è crescente in $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

## Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{2n}$

Sol:

$$\left(\frac{n^2+1+n-n}{n^2+n+1}\right)^{2n} = \left(1-\frac{n\ :n}{n^2+n+1\ :n}\right)^{2n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{\underbrace{n+1+\frac{1}{n}}_{=:\,x_n\to+\infty \text{ per } n\to+\infty}}\right)^{\left(n+1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{2n}{n+1+\frac{1}{n}}}$$

$$= \left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}}_{\to e^{-1}}\right)^{\frac{2n}{n+1+\frac{1}{n}}\to 2}$$

$$\to (e^{-1})^2 = \frac{1}{e^2} \quad \text{per } n\to+\infty$$

## Esercizio 2

[5 punti]

Data la funzione $f(x)=x^3-2x-1$, trovare i punti $x_0\in\mathbb{R}$ in cui l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ è $y=x+1$.

Sol: L'equazione della retta tangente in $x_0\in\mathbb{R}$ è data da

$$y = f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$= f'(x_0)\cdot x + \left(f(x_0)-x_0\cdot f'(x_0)\right) =: m\cdot x+q$$

$$\overset{!}{=} 1\cdot x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad m = f'(x_0)\overset{!}{=}1, \quad q = f(x_0)-x_0\cdot f'(x_0)\overset{!}{=}1$$

$\Rightarrow$ • $f'(x_0) = 3x_0^2-2 \overset{!}{=} m=1 \Leftrightarrow 3x_0^2=3 \Leftrightarrow x_0^2=1$

$\Leftrightarrow \underline{x_0=\pm 1}$

• $f(1) = 1^3-2\cdot 1-1 = -2 \Rightarrow$

$f(1)-1\cdot f'(1) = -2-1=-3=q\neq 1$

• $f(-1) = (-1)^3-2\cdot(-1)-1 = 0 \Rightarrow$

$f(-1)-(-1)\cdot f'(-1) = 0+1 = q = 1$ ✓

Quindi $y=x+1$ è retta tangente al grafico di $f$ in $x_0=-1$.

## Esercizio 3

**[5 punti]**

Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 3 della funzione $f(x) = 2e^x - \frac{\sin(x)}{x} + \ln(1+2x)$

Sol:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$2e^x = 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \underbrace{\frac{1}{x} \cdot o(x^4)}_{= o\left(\frac{1}{x} \cdot x^4\right) = o(x^3)}$ per $x \to 0$

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$ $(t = 2x)$

$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)$

$= 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$

$\Rightarrow$ $2e^x - \frac{\sin(x)}{x} + \ln(1+2x) =$

$2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} - 1 + \frac{x^2}{6} + 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) =$

$1 + 4x + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{6} - 2\right)}_{= \frac{6+1-12}{6} = \frac{-5}{6}} \cdot x^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right)}_{= \frac{9}{3} = 3} x^3 + o(x^3) =$

$1 + 4x - \frac{5}{6}x^2 + 3x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.

$\Rightarrow$ $T_3(x) = 1 + 4 \cdot x - \frac{5}{6} \cdot x^2 + 3x^3$.

---

## Esercizio 4

**[4 punti]**

Calcolare, se esistono, le derivate parziali in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1 + \sin(x^3) - \cos(y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1 + \sin(h^3) - \overbrace{\cos(0)}^{=1}}{h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} = 1 = f_x(0,0)$$

Cioè, f è derivabile rispetto ad x in $(0,0)$ con $f_x(0,0) = 1$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+\overbrace{\sin(0^3)}^{=0}-\cos(h)}{h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(h)}{h^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{h}}_{\to \pm\infty} \quad \underline{\text{non}} \text{ converge.}$$

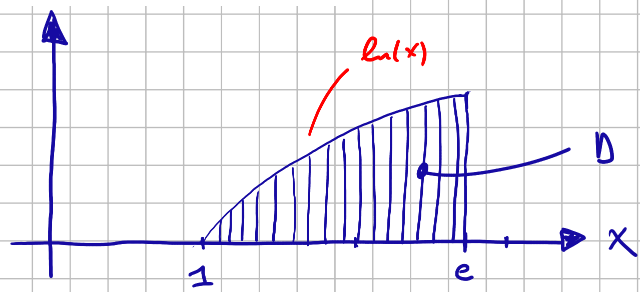
Cioè, f <u>non</u> è derivabile rispetto ad y in (0,0).

---

**Esercizio 5** **[5 punti]**

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) : 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln(x)\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D x \, dx\, dy$$




$$I = \int_{x=1}^{e} \int_{y=0}^{\ln(x)} x \, dy \, dx = \int_1^e x \cdot y \Big|_{y=0}^{\ln(x)} dx$$

$$= \int_1^e \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g} \, dx = \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x)}_{f \cdot g} \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}_{f \cdot g'} \, dx$$

$$= \frac{e^2}{2} \cdot \overbrace{\ln(e)}^{=1} - \frac{1^2}{2} \cdot \overbrace{\ln(1)}^{=0} - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1^2) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2+1}{4}$$