Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 2.7.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ per una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(ii) Dire se esiste una serie a termini positivi che non ammette somma (ne finita, ne infinita). Giustificare la risposta.

Risposta

(i) Sia $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Allora la serie diverge a $+\infty$ se

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

(ii) No, non esiste. Infatti se $a_n \geq 0\ \forall n$, allora $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sup\{s_n : n\in\mathbb{N}\}$ esiste sempre.

Domanda 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1[-1,1]$ tale che $f(-1) = 0$ e $\int_{-1}^{1}(x-1)\cdot f'(x) = 0$. Allora

[a] f è costante

~~[b]~~ esiste $c \in (-1,1)$ tale che $f(c) = 0$

[c] $f'(x) = 3x+1$ per $x \in [-1,1]$

[d] $f(1) = 0$

Risposta

Usando integrazione per parti segue

$$\int_{-1}^{1}(x-1)f'(x)\,dx = (x-1)\cdot f(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1\cdot f(x)\,dx$$

$$= (1-1)\cdot f(1) - (-1-1)\cdot f(-1) - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.$$

Però per il teorema della media $\exists\, c \in (-1,1)$ t.c.

$$f(c)\cdot\underbrace{(1-(-1))}_{=2} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(c) = 0.$$

Esercizio 1

[3 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^2}_{=\frac{1}{x^2}}\Big(\cos\big(\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{=x^2}\big) - \cos^2\big(\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{=x\to 0 \text{ per } n\to+\infty}\big)\Big) = 1$$

Risoluzione

Taylor: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow \cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$

$= 1 - 2\cdot\frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 - x^2 + o(x^2)$. Inoltre vale

$\cos(t) = 1 + o(t) \Rightarrow \cos(x^2) = 1 + o(x^2)$. Quindi risulta

$\cos(x^2) - \cos^2(x) = \cancel{1} - \cancel{1} + x^2 + o(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$n^2\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{\underbrace{1/n^2}_{=x^2}}\cdot\Big(\cos\big(\underbrace{1/n^2}_{=x^2}\big) - \cos^2\big(\underbrace{1/n}_{=:x\to 0 \text{ per } n\to+\infty}\big)\Big)$

$\sim \frac{x^2}{x^2} = 1$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ il limite $= 1$

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I = \int_0^{\ln(3)} \frac{\overbrace{e^{2x}}^{=\overbrace{e^x}^{=t}\cdot e^x}}{2+e^x}\,dx$$

where $e^x\,dx = dt$.

Sost: $e^x = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^x$

$\Rightarrow dt = e^x\,dx$. Inoltre

- $x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$
- $x = \ln(3) \Rightarrow t = e^{\ln(3)} = 3$

Risoluzione

$\Rightarrow I = \int_1^3 \frac{t+2-2}{2+t}\,dt = \int_1^3 1 - \frac{2}{2+t}\,dt$

$= t\Big|_1^3 - 2\cdot\ln(2+t)\Big|_1^3 = (3-1) - 2\left(\ln(2+3) - \ln(2+1)\right)$

$= 2 - 2\cdot(\ln(5) - \ln(3)) = 2\left(1 - \ln\left(5/3\right)\right)$

Esercizio 3

[3 punti]

Data la funzione $f(x, y, z) = x - \sin(y+z)$ calcolare il versore v per cui la derivata direzionale $D_v(1, 1, 1)$ è massimo.

Risoluzione

f è differenziabile, quindi in ogni punto del dominio il gradiente punta nella direzione di massima crescita della funzione. Di conseguenza

$V = \dfrac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}$. Visto che $\nabla f(x,y,z) = (1, -\cos(y+z), -\cos(y+z))$

$\overset{(x,y,z)=(1,1,1)}{\Rightarrow} (1, -\cos(2), -\cos(2))$

Segue $V = \dfrac{(1, -\cos(2), -\cos(2))}{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos^2(2)}}$.

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

Ponendo $y = mx$ segue $f(x,y) = \dfrac{x^3 + m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{x + m^2}{1+m^2}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x, mx) = \dfrac{m^2}{1+m^2}$ dipende da m $\Rightarrow$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$.

Derivabilità: Se $y = 0$: $f(x,0) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2} = x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} = x \Rightarrow$

$f_x(0,0) = 1$

Se $x = 0$: $f(0,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{y^2} = 1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases} \Rightarrow f_y(0,0)$ non esiste.

Esercizio 5 [6 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln\big((x+2)\cdot|x-1|\big)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio: $x \in$ dom. di $f \iff (x+2)\cdot|x-1| > 0 \iff \begin{cases} x+2>0 \\ |x-1| \neq 0 \end{cases}$

$\iff x > -2,\ x \neq 1$ cioè dom. di $f = (-2,+\infty)\setminus\{1\}$

• Simmetrie: non ci sono

• zeri: $f(x) = 0 \iff (x+2)\cdot|x-1| = 1 \iff \begin{cases} x>1 \text{ e } (x+2)(x-1)=1 \\ \text{opp.} \\ x<1 \text{ e } (x+2)(1-x)=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x>1 \text{ e } x^2+x-3=0 \\ \text{opp.} \\ x<1 \text{ e } -x^2-x+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

• $f'(x) = \begin{cases} \big(\ln((x+2)\cdot(x-1))\big)' & \text{se } x>1 \\ \big(\ln((x+2)\cdot(1-x))\big)' & \text{se } -2<x<1 \end{cases} = \begin{cases} \big(\ln(x+2)+\ln(x-1)\big)' & \text{se } x>1 \\ \big(\ln(x+2)+\ln(1-x)\big)' & \text{se } -2<x<1 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1} = \frac{x-1+x+2}{(x+2)(x-1)} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} & \text{se } x>1 \\ \frac{1}{x+2}+\frac{(-1)}{1-x} = \frac{1-x-x-2}{(x+2)(1-x)} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} & \text{se } -2<x<1 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=-1/2$. Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x=-1/2$ da "+" a "−" $\Rightarrow x=-1/2$ è un pto. di massimo locale.
$f(-1/2) = \ln(3/2\cdot 3/2) = 2\cdot\ln(3/2) > 0$.

Asintoti: $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$. Però $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ non ci sono asintoti obl.

Grafico: