Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 2.7.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

Domanda 1

[3 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(ii) Dire se esiste una serie a termini negativi che non ammette somma (ne finita, ne infinita). Giustificare la risposta.

Risposta

(i) Sia $s_n := a_1 + a_2 + .. + a_n$. Allora la serie converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = s \text{ converge.}$$

(ii) No, non esiste. Infatti, se $a_n \leq 0 \ \forall n$, allora (s_n) è decrescente e quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ esiste sempre.

Domanda 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1[-1,1]$ tale che $f(1) = 0$ e $\int_{-1}^{1} (1+x) \cdot f'(x) = 0$. Allora

- a $f(-1) = 0$
- b $f'(x) = 1 - 3x$ per $x \in [-1,1]$
- c esiste $c \in (-1,1)$ tale che $f(c) = 0$
- d f è costante

Risposta

Usando integrazione per parti segue (cfr. capitolo 1-A) che $\exists\, c \in (-1,1)$ t.c. $f(c) = 0$.

Esercizio 1

[3 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^4}_{=\frac{1}{x^4}}\Big(\sin\big(\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{=x^2}\big) - \sin^2\big(\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{=x\to 0 \text{ per } n\to+\infty}\big)\Big) = 1/3$$

Risoluzione

Con Taylor: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \to 0 \Rightarrow \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$

$= x^2 - \underbrace{\frac{2x^4}{6}}_{=1/3\cdot x^4} + o(x^4)$. Inoltre vale $\sin(t) = t + o(t^2)$ per $t \to 0 \Rightarrow$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$ per $x \to 0$. Quindi risulta

$\sin(x^2) - \sin^2(x) = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{3}x^4$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$n^4 \cdot \left(\sin(1/n^2) - \sin^2(1/n)\right) = \frac{1}{\underbrace{1/n^4}_{=x^4}} \cdot \left(\sin(\underbrace{1/n^2}_{=x^2}) - \sin^2(\underbrace{1/n}_{=x})\right)$

$\sim \frac{1/3 \cdot x^4}{x^4} = 1/3$ per $x \to 0 \Rightarrow$ limite $= 1/3$.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{\overbrace{e^x\,dx}^{=dt}}{4 + \underbrace{e^{2x}}_{e^x\cdot e^x = t^2}}$$

Sost: $e^x = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow$

- $dt = e^x \cdot dx$. Inoltre
- $x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$
- $x = \ln(2) \Rightarrow t = e^{\ln(2)} = 2$

Risoluzione

$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{dt}{4+t^2}\,dt$

$= \frac{1}{4} \cdot \int_1^2 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot 2 \arctan\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_1^2$

$= \frac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} - \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\Big) = \underline{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)}$

Esercizio 3

[3 punti]

Data la funzione $f(x, y, z) = \sin(y-x)+z$ calcolare il versore v per cui la derivata direzionale $D_v(1, 1, 1)$ è massimo.

Risoluzione

Ragionando come sul compito 1-A segue

$V = \frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}$. Visto che $\nabla f(x,y,z) = (-\cos(y-x), \cos(y-x), 1)$

$\underset{(x,y,z)=(1,1,1)}{=} (-\cos(0), \cos(0), 1)$

$= (-1, 1, 1)$ segue

$V = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

Ponendo $x = my$ segue $f(x,y) = \frac{m^2y^2 - y^3}{m^2y^2+y^2} = \frac{m^2-y}{m^2+1} \Rightarrow$

$\lim_{y \to 0} f(my, y) = \frac{m^2}{m^2+1}$ dipende da m $\Rightarrow$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$

Derivabilità: se $x=0$: $f(0,y) = \begin{cases} -\frac{y^3}{y^2} = -y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases} = -y \Rightarrow$

$f_y(0,0) = -1$.

se $y=0$: $f(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2} = 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f_x(0,0)$ non esiste.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln(|x+2| \cdot (1-x))$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Si procede come sul compito 1-A. Così risulta

- dominio di $f = (-\infty, 1) \setminus \{-2\}$
- simmetrie: NO
- zeri: $f(x) = 0 \iff x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ opp. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- $f'(x) = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = -1/2$ e in

$x = -1/2$ $f'(x)$ cambia segno da "+" a "−" $\Rightarrow x = -1/2$ è

un pto. di max. locale. $f(-1/2) = 2 \cdot \ln(3/2) > 0$.

- Asintoti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Però $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ non $\exists$ asint. obl.

$\lim_{x \to -2} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$.

Grafico: