Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **20.1.22**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al limite $l \in \mathbb{R}$.

(ii) Fare l'esempio di una successione con $\lim_{n\to+\infty} a_n = e$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|l - a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

(ii) p.e. $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $x^2 = \ln(2-x)$ ammette una soluzione $x \in [0,1]$.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua con $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$.

(ii) x è una soluzione $\Leftrightarrow f(x) := x^2 - \ln(2-x) = 0$. Inoltre $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua con $f(0) = 0^2 - \ln(2-0) = -\ln(2) < 0$

$f(1) = 1^2 - \ln(2-1) = 1 > 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$, cioè $x = c \in (0,1)$ è una soluzione.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cosh(x)}{\ln(1+x)\cdot\big(\cos(x)-1\big)} =: \ell$$

Risoluzione

Denominatore:

- $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
- $\cos(x) - 1 = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$

P.d.S. $\Rightarrow \ln(1+x)\cdot(\cos(x)-1) \sim x\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{2}$ per $x \to 0$

Numeratore, da sviluppo fino al 3° ordine:

$$e^x - \sin(x) - \cosh(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) + o(x^3)$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3} \text{ per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{x^3}}/3}{-\underset{1}{\cancel{x^3}}/2} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_e^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2}\, dx$$

Risoluzione

- $$\int \underset{f'}{x^{-2}} \cdot \underset{g}{\ln(2x)}\, dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underset{f}{-x^{-1}} \cdot \underset{g}{\ln(2x)} - \int \overbrace{\underset{f}{(-x)^{-1}} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{\cancel{2}x}}\cdot\cancel{2}}^{=x^{-2}}\, dx$$

$$= -x^{-1}\cdot\ln(2x) - x^{-1} + \text{const.}$$

- $$I = \lim_{b\to+\infty} \int_e^b \frac{\ln(2x)}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_e^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{\ln(2b)}{b}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{b}}_{\to 0} + \frac{\ln(2\cdot e)}{e} + \frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{e}\cdot\big(\ln(2e) + 1\big) = \frac{1}{e}\big(\ln(2) + \overbrace{\ln(e)}^{=1} + 1\big)$$

$$= \frac{\ln(2) + 2}{e}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(-1,2)$ per $f(x,y) = x^3 \cdot y$ e il versore $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Risoluzione

- f è C^1, quindi differenziabile. Per il teorema del gradiente segue $D_v f(-1,2) = f_x(-1,2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + f_y(-1,2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$
- $f_x(x,y) = 3x^2 \cdot y \Rightarrow f_x(-1,2) = 3 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 6$
- $f_y(x,y) = x^3 \cdot 1 \Rightarrow f_y(-1,2) = (-1)^3 = -1$

$\Rightarrow D_v f(-1,2) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{3 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \big(|x| - 1\big) \cdot (y+1)$$

Risoluzione

- f è, come prodotto di funzioni continue, continua
- $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - \overbrace{f(0,0)}^{=-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(|h|-1)\cdot(0+1) - (-1)}{h}$

  $= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ non esiste.
- $f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-1)\cdot(h+1) - (-1)}{h}$

  $= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}^{1}}{\cancel{h}_{1}} = -1$

$\Rightarrow$ f non è derivabile $\Rightarrow$ f non è differenziabile

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: tutto $\mathbb{R}$.

Zeri: $f(x) = (x^2+2x)\cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0 \text{ sempre}} = 0 \iff x^2+2x = (x+2)\cdot x = 0 \iff x=-2$ opp. $x=0$.

Asintoti: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{x^2}^{\to+\infty}\left(1+\overbrace{\tfrac{2}{x}}^{\to 0}\right)}{\underbrace{e^x}_{\to 0^+}} = \frac{+\infty\cdot(1)}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ possibilità di un asintoto obliquo:

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^{\cancel{2}}+2\cancel{x})}{\cancel{x}\cdot e^x} = \frac{-\infty+2}{0^+} = -\infty$ non $\exists$ asintoto obliquo.

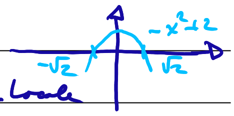
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{e^x} = 0$ (limite notevole oppure applicare 2 volte l'Hospital)

$\Rightarrow$ $y=0$ è un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$.

Estremi locali: Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici: $f'(x) = (2x+2)\cdot e^{-x} + (x^2+2x)\cdot e^{-x}(-1)$

$= (-x^2+2)\cdot\underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in



$x = -\sqrt{2}$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ $x=-\sqrt{2}$ è un pto. di min. locale

$x = +\sqrt{2}$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ $x=+\sqrt{2}$ è un pto. di max. locale

Grafico: