Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 20.7.17

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Dire se $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$ è derivabile in $x_0 = 0$ giustificando la risposta.

Risposta

(i)

$\Rightarrow$ appunti

Studiamo il rapporto incrementale in $x_0=0$:

(ii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\sqrt[3]{h}}{\cancel{h}} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0=0$ con derivata $f'(0)=0$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (o del valor medio).

(ii) Trovare il punto c del teorema di Lagrange per la funzione $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Risposta

(i)

$\Rightarrow$ appunti

(ii)

- f e continua e derivabile in $(1,2)$
- $f(1) = 1-3+4 = 2$, $f(2) = 4-6+4 = 2$
- $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 0 \overset{!}{=} f'(c) = 2c-3 \Leftrightarrow c = 3/2$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{n}{1+n^2}\right)\right)$$

Risoluzione

- $\frac{n}{1+n^2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ (per il principio di sostituzione) $\to 0$ per $n \to +\infty$

- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow 1 - \cos\left(\frac{n}{1+n^2}\right) \sim \frac{\left(\frac{n}{1+n^2}\right)^2}{2} \sim \frac{1}{2n^2}$ per $n \to +\infty$

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ converge

Quindi per il criterio del confronto asintotico anche S converge.

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso in cui converga, calcolarne il valore

$$I := \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$$

Risoluzione

$$I = \lim_{a \to 1^+} \int_a^5 (x-1)^{-1/2}\, dx = \lim_{a \to 1^+} \frac{1}{1/2} \cdot (x-1)^{1/2} \Big|_{x=a}^{x=5}$$

$$= 2 \cdot \lim_{a \to 1^+} \Big(\underbrace{\sqrt{5-1}}_{=4} - \underbrace{\sqrt{a-1}}_{\to 0} \Big) = 4$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(x_0, y_0) = (1, 2)$ alla funzione $f(x, y) = x^2 y + 3$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = 1^2\cdot 2 + 3 = 5$
- $f_x(x,y) = 2xy \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$
- $f_y(x,y) = x^2 \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = 1^2 = 1$

$\Rightarrow p(x,y) = \underline{\underline{5 + 4(x-1) + 1\cdot(y-2)}}$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\cdot\sin(x^2\cdot y^2)}{x^4+y^4} =: f(x,y)$$

Risoluzione

- poniamo $y = m\cdot x$ con $m \in \mathbb{R}$.

Allora $\lim_{x\to 0} f(x, m\cdot x) = 3\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2\cdot m^2\cdot x^2)}{x^4+m^4\cdot x^4}$ $\sim m^2\cdot x^4$

$= 3\cdot \frac{m^2}{1+m^4}$

- Visto che questo limite dipende da $m\in\mathbb{R}$ ℓ <u>non</u> esiste.

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio $= \mathbb{R} \setminus \{1\}$, non ci sono simmetrie
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$
- $\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{e}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{e}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ • $x = 1$ è un asintoto verticale

• $y = 0$ è un asintoto orizzontale

• non ci sono asintoti obliqui

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ mai! (non ci sono zeri)

$f(0) = \frac{e^0}{0-1} = -e$

- $f'(x) = \frac{(x-1)\cdot e^x - 1\cdot e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = 2$. Inoltre in $x_0 = 2$ $f'(x)$ cambia segno da "$-$" a "$+$", cioè $x_0 = 2$ è un pto. di
$\searrow$ $\nearrow$
minimo locale. $f(2) = \frac{e^2}{1} = e^2$

- Grafico: