Domanda 1 [4 punti]

20.7.21

(i) Dare la definizione di estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1-n}{2+n} \; : \; n = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

Sol: i) $s_0 = \sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A,

cioè $\begin{cases} \bullet \; s_0 \geq a \quad \forall a \in A, \\ \bullet \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, a \in A \text{ t.c. } a > s_0 - \varepsilon. \end{cases}$

ii) $a_n = \dfrac{1-n}{2+n} = \dfrac{3-(2+n)}{2+n} = \dfrac{3}{2+n} - 1$

crescente

decrescente

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente

$\Rightarrow \sup A = a_0 = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2} = \max A.$

Domanda 2 [4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Trovare i punti c del teorema di Rolle per la funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Sol: i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$ allora $\exists \, c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$.

ii) $f \in C[0,3]$ è derivabile in $(0,3)$ e $f(0) = 4 = f(3)$.

Inoltre, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ oppure $x = 2$.

Quindi $c_0 = 0$ e $c_1 = 2$ sono i punti cercati.

Esercizio 1 [5 punti]

sudiare la convergenza della serie

$$S := \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{n^6 + 6n + 6} - n^3 \right)}_{=: a_n}$$

Sol: • $0 \leq a_n = \dfrac{\sqrt{n^6+6n+6} - n^3}{\sqrt{n^6+6n+6} + n^3} \cdot \left(\sqrt{n^6+6n+6} + n^3 \right)$

$= \dfrac{\cancel{n^6} + 6n + 6 \cancel{- n^6}}{\sqrt{n^2+6n+6} + n^3} \leq 6 \cdot \dfrac{n+1}{n^3} \sim 6 \cdot \dfrac{n}{n^3}$

$= 6 \cdot \dfrac{1}{n^2}$

• La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 6 \cdot \frac{1}{n^2}$ converge

$\Rightarrow$ La serie data converge per il teorema del confronto.

Esercizio 2 [5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{\int_3^x (t^2+2t-15)\cdot e^{t^2}\,dt}^{=:\,F(x)}}{\underbrace{x^2-6x+9}_{=:\,p(x)}}$$

Sol: • Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x)$ è derivabile con $F'(x) = (x^2+2x-15)\cdot e^{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

• $F(x) \to 0$ e $p(x) \to p(3) = 0$ per $x \to 3$.

• Applicando la regola di de l'Hospital segue

$$\ell \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 3} \frac{(x^2+2x-15)\cdot \underbrace{e^{x^2}}_{\to e^9 \text{ per } x\to 3}}{2x-6} \qquad \left(= \frac{3^2-2\cdot 3-15}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 3} e^9 \cdot \frac{2x-2}{2} = e^9 \cdot \frac{6-2}{2} = 4\cdot e^9$$

Esercizio 3 [5 punti]

Calcolare il polinomio di Mclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = 2\cdot\cos(x^2) - x\cdot\ln(1+3x)$.

Sol: • $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$ $\overset{(t=x^2)}{\Rightarrow}$

$$2\cdot\cos(x^2) = 2\cdot\left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$
$$= 2 - x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

• $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \to 0$ $\overset{(t=3x)}{\Rightarrow}$

$$x\cdot\ln(1+3x) = x\cdot\left(3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o((3x)^3)\right)$$
$$= 3x^2 - \frac{9}{2}x^3 + 9x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ $2\cdot\cos(x^2) - x\cdot\ln(1+3x)$

$$= 2 - 3x^2 + \frac{9}{2}x^3 - 10x^4 + o(x^4)$$

$\Rightarrow$ $T_4(x) = 2 - 3x^2 + \frac{9}{2}x^3 - 10x^4$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \sin\big(x \cdot \ln(y^2)\big)$ nel punto $(x_0, y_0) = (\pi, e)$

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = \sin(\pi \cdot \overbrace{\ln(e^2)}^{=2}) = \sin(2\pi) = 0$
- $f_x(x,y) = \cos(x\cdot\ln(y^2))\cdot\ln(y^2) \Rightarrow$

  $f_x(x_0,y_0) = \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}\cdot\ln(e^2) = 2$
- $f_y(x,y) = \cos(x\cdot\ln(y^2))\cdot\frac{x}{y^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{y} \Rightarrow$

  $f_y(x_0,y_0) = 1\cdot\frac{2\pi}{e} = \frac{2\pi}{e}$

$\Rightarrow p(x,y) = 2\cdot(x-\pi) + \frac{2\pi}{e}\cdot(y-e)$

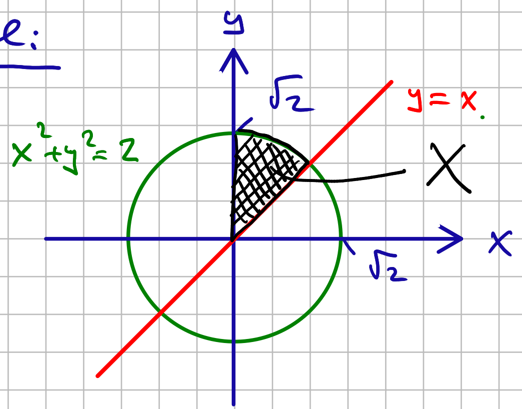
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare il dominio $X = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2, 0\le x\le y\big\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X x^2\cdot y\,dx\,dy$$

Sol:



X corrisponde a

$X' = \{(\rho,\vartheta) \mid 0\le\rho\le\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}\}$

in coordinate polari.

Quindi risulta

$$I = \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}}\int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/2} \rho^2\cdot\cos^2(\vartheta)\cdot\rho\cdot\sin(\vartheta)\cdot\rho\cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\rho^4\,d\rho\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\underbrace{\cos^2(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)}_{=-\frac{\cos^3(\vartheta)}{3}}\,d\vartheta$$

$$= \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}\cdot\left[-\frac{\cos^3(\vartheta)}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Big(\underbrace{-\cos^3(\pi/2)}_{=0}+\underbrace{\cos^3(\pi/4)}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}}\Big) = \frac{\cancel{4}}{15}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{4}} = \frac{2}{15}$$