Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 23.11.10

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di $f(x) = o\big(g(x)\big)$ per $x \to c$.

(ii) Fare un esempio di f tale che $f(x) = o\big(\sin(x)\big)$ per $x \to \pi$.

Risposta

(i) $f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$ se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(ii) $(\pi - x)^2 = o(\sin(x))$ per $x \to \pi$ visto che

$$\lim_{x \to \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\sin(x)} \left(= \frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{2(x-\pi)}{\cos(x)} = \frac{2 \cdot 0}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il principio di induzione.

(ii) Verificare che $4n^3 - n$ è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Risposta

(i) Cfr. appunti

(ii) N.B. $m \in \mathbb{N}$ è divisibile per 3 se $m = 3 \cdot k$ per un $k \in \mathbb{N}$.

Base ($n=0$): $4n^3 - n = 4 \cdot 0^3 - 0 = 0 = 3 \cdot 0$ ✓

Passo induttivo: Supponiamo che $4n^3 - n$ sia divisibile per 3 per un certo $n \in \mathbb{N}$. Sotto questa ipotesi è da dimostrare che anche

$$4(n+1)^3 - (n+1) = 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1$$
$$\circledast \quad = \underbrace{4n^3 - n}_{\text{divisibile per 3 per ipotesi}} + 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1)$$

è divisibile per 3.

Ciò, però, segue dall'equazione $\circledast$

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_{n+9} = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

[a] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge [b] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge [c] (X) $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ [d] $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Risoluzione

Dall'equazione $a_{n+9}=a_n$ segue $\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \{a_0, \dots, a_8\}$

e quindi $\sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \max\{a_0, \dots, a_8\} < +\infty$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia $f \in C[a, b]$ e $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Allora

[a] f è derivabile in $x = c$ [b] $f(a) \cdot f(b) < 0$

[c] (X) $f(x) = o(1)$ per $x \to c$ [d] $f(x) \sim x - c$ per $x \to c$

Risoluzione

Visto che f è continua, $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x\to c} f(x) = f(c) = 0$

segue $f(x) = o(1)$ per $x \to c$. N.B.: La risposta b) è sbagliata!!!

Esercizio 3 **[3 punti]**

Il polinomio di Mc Laurin di ordine 5 della funzione $f(x) = \cos(\sin(x)) - 1$ è dato da

[a] $x - \frac{x^3}{6}$ [b] $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ [c] (X) $-\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$ [d] $\frac{x^5}{5!}$

Risoluzione

Abbiamo
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = x + o(x^2)$ per $x \to 0$
- $\cos(t) - 1 = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5)$ per $t \to 0$.

Ponendo $t = \sin(x)$ segue

$$\cos(\sin(x)) - 1 = -\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x + o(x^2)\right)^4}{24} + o(\overbrace{\sin^5(x)}^{\sim x^5})$$

$$= -\frac{x^2 - 2x\cdot\frac{x^3}{6} + o(x^5)}{2} + \frac{x^4 + o(x^5)}{24} + o(x^5)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow T_5(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{\cos(x)} - e^{\frac{\sin(x)}{x}}} = -\frac{3}{e}$$

Risoluzione Con Taylor:

N.B.: Non si possono sostituire direttamente gli sviluppi di $\cos(x)$ e $\frac{\sin(x)}{x}$ in quello di e^t per $t \to 0$ poiché $\cos(x), \frac{\sin(x)}{x} \to 1$ per $x \to 0$ (e non a 0)!! Invece si procede così:

$e^{\cos(x)} = e \cdot e^{\overbrace{\cos(x)-1}^{=:t\to 0 \text{ per } x\to 0}}$ e da $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$

$t = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ segue

$e^{\cos(x)} = e\cdot\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(\underbrace{\cos(x)-1}_{\sim -\frac{x^2}{2}}) = e\left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$ per $x \to 0$.

Similmente, $e^{\frac{\sin(x)}{x}} = e \cdot e^{\frac{\sin(x)}{x} - 1}$, $\frac{\sin(x)}{x} - 1 = t \to 0$ per $x \to 0$ e con

$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ per $x \to 0$

segue

$e^{\frac{\sin(x)}{x}} = e \cdot e^{\frac{\sin(x)}{x} - 1} = e\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + o(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x} - 1}_{\sim -\frac{x^2}{6}}) = e\left(-\frac{x^2}{6}\right) + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow e^{\cos(x)} - e^{\frac{\sin(x)}{x}} = e\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -e \cdot \frac{x^2}{3} + o(x^2) \sim -e\frac{x^2}{3}$.

$\overset{\text{P.d.S.}}{\Longrightarrow} \frac{x^2}{e^{\cos(x)} - e^{\frac{\sin(x)}{x}}} \sim \frac{x^2}{-e\cdot\frac{x^2}{3}} = \frac{-3}{e} =$ limite

Esercizio 5

[4 punti]

Verificare che la funzione $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ ha un unico zero e calcolarne un valore approssimativo con un errore $< \frac{1}{8}$.

Risoluzione

Allora, f è derivabile con $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x^2 + 2x + 1)$

$= 2x^2 + (x+1)^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è strett. crescente $\Rightarrow f$ è iniettiva

(teorema degli zeri)

Inoltre, $f(0) = -1$, $f(1) = 1+1+1-1 = 2 > 0 \overset{\text{↑}}{\Rightarrow} \exists\, c \in [0,1]$ con $f(c) = 0$.

Per calcolare un approssimazione di c si procede come nella dimostrazione del teorema degli zeri:

$f(1/2) = (1/2)^3 + (1/2)^2 + 1/2 - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1+2-4}{8} < 0 \Rightarrow c \in [\frac{1}{2}, 1]$

$f(3/4) = (3/4)^3 + (3/4)^2 + 3/4 - 1 = \frac{3^3 + 4\cdot 3^2 + 4^2\cdot 3 - 4^2}{4^3} > 0 \Rightarrow c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$\Rightarrow c^* = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$ è una sol. appross. con $|c^* - c| < \frac{1}{8}$.

Esercizio 6

[5 punti]

$$= \frac{x\cdot(5x^2+4)}{20(x^2-1)}$$

Studiare la funzione $f(x) = \frac{5x^3+4x}{20(x-1)(x+1)}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio di f: $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$. f è derivabile (∞ volte) nel suo dominio.
- Simmetrie: numeratore = dispari, denominatore = pari $\Rightarrow$ f è dispari
- Intersezione con gli assi: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $f(0)=0$.
- Segno di f: f cambia segno negli zeri del numeratore e del denominatore cioè in $x=-1, 0, +1$. Inoltre per x grande f è positiva $\Rightarrow$

f: $-$ × $+$ • $-$ × $+$ (in -1, 0, 1)

- Limiti alla frontiera:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$$

- Asintoti: verticali $x=\pm 1$, obliqui: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = m$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3+4x-20(x^2-1)\cdot\frac{1}{4}x}{20(x^2-1)} = 0$$

$\Rightarrow y=\frac{x}{4}$ è un asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$

- Studio di

$$f'(x) = \frac{20\cdot(x^2-1)\cdot(15x^2+4)-20\cdot 2x\cdot(5x^3+4x)}{(20(x^2-1))^2} = \frac{5x^4-19x^2-4}{20(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{19\pm\sqrt{19^2+4\cdot 5\cdot 4}}{2\cdot 5} = \frac{19\pm 21}{10} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{1}{5} \text{ impossibile}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=\pm 2$

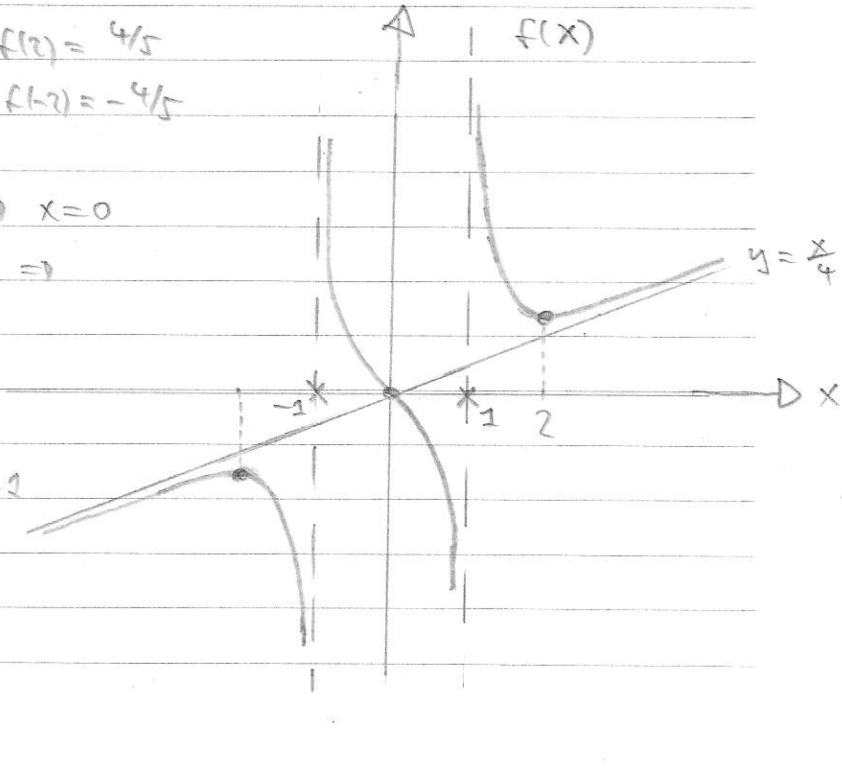
- Studio di

$$f''(x) = \frac{20(x^2-1)^2(20x^3-2\cdot 19\cdot x)-20\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x\cdot(5x^4-19x^2-4)}{(20(x^2-1)^2)^2}$$

$$= \frac{9x(x^2+3)}{10(x^2-1)^3} \Rightarrow f''(+2)>0, \quad f''(-2)<0$$

$\Rightarrow x=2$ = p.to di min. loc., $f(2)=4/5$

$x=-2$ = —"— max loc., $f(-2)=-4/5$



- p.ti di flesso: $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ e f'' cambia segno in $x=0$ $\Rightarrow$ $x=0$ è un p.to di flesso.

- Concavità/Convessità: f'' cambia segno in $x=-1,0,+1$ e $f''(x)>0$ per x grande $\Rightarrow$

conc. × conv. • conc. × conv. (in -1, 0, 1)