Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **21.2.23**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di dominio y-semplice $X \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) Enunciare il teorema di Fubini–Tonelli per domini y-semplici.

Risposta

(i) $X \subseteq \mathbb{R}^2$ è y-semplice se esistono funzioni continue $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$X = \{ (x,y) \mid x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

(ii) Se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e $X \subset \mathbb{R}^2$ è y-semplice, allora f è integrabile e

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Domanda 2

[5 punti]

(i) Enunciare il test di monotonia per le funzioni derivabili.

(ii) Determinare gli intervalli di crescenza della funzione $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

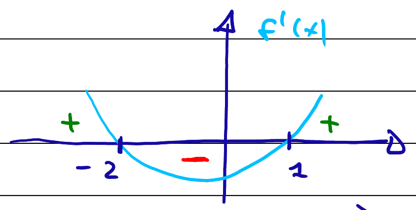
Risposta

(i) Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora

- f è crescente $\iff f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a,b)$
- f è decrescente $\iff f'(x) \le 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(ii) • f è derivabile con $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6 \cdot (x^2 + x - 2)$

• $f'(x) = 0 \iff x = x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$



Quindi $f'(x) \ge 0 \iff \begin{cases} x \le -2 \\ \text{oppure} \\ x \ge 1 \end{cases}$

Di conseguenza: f è crescente in $(-\infty, -2]$ e $[1, +\infty)$.

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x}-e^x}{1-\cos(x)} =: \ell$$

Risoluzione

Sol:

$e^0 = 1$ $\quad$ 1

$$\frac{e^{x^2+x}-e^x}{1-\cos(x)} = \frac{e^x\cdot(e^{x^2}-1)}{\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot x^2} \to \frac{1}{1/2} = 2 = \ell$$

per $x\to 0$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ per $x\to 0$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$$

Risoluzione

- Si usa la sostituzione $e^x = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^x = t$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{t}\cdot dt$

Quindi $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt$

- $\frac{0\cdot t+1}{(1+t)\cdot t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{A\cdot t + B\cdot(1+t)}{(1+t)\cdot t} = \frac{(A+B)\cdot t + B}{(1+t)\cdot t}$

$\Rightarrow A+B=0$ e $B=1 \Rightarrow A=-1$ e $B=1$ cioè $\frac{1}{(1+t)\cdot t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$

$\Rightarrow \int\frac{dx}{1+e^x} = \int\frac{1}{(1+t)\cdot t}\,dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(t) - \ln(1+t)$

$= \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right).$

1 per $b\to+\infty$ $\quad$ $\frac{1}{2}$

- $I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^b}{1+e^b}\right) - \ln\left(\frac{e^0}{1+e^0}\right)\right]$

$= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare un vettore $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ che punta in $(x_0, y_0) := (4, 1)$ nella direzione di massima crescenza della funzione $f(x, y) := \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Risoluzione

- Se $f \in C^1$, allora (per il teorema del gradiente) grad $f(x_0, y_0)$ punta in (x_0, y_0) nella direzione di massima crescenza di f.

- $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \in C^1$ con

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f_x(4,1) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{e}$$

$$f_y(4,1) = 4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1^{-\frac{3}{2}} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Quindi $u = \left(\frac{1}{4}, -1\right) = \text{grad } f(4,1)$ punta in $(4,1)$ nella direzione di massima crescenza di f.

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin(x^3) \cdot \ln(1+y)}{x^4 + 2y^4}}_{=: f(x,y)}.$$

Risoluzione

- Ponendo $y = m \cdot x$ per $m \in \mathbb{R}$ segue:

$$\lim_{x \to 0} f(x, m\cdot x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) \cdot \ln(1 + m\cdot x)}{x^4 + 2m^4 \cdot x^4}$$

per $x \to 0$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\frac{1+2m^4}{m}} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 + m x)}{m \cdot x}}_{\to 1} \right)$$

$$= \frac{m}{1+2m^4} \quad \text{dipende da } m!$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ \underline{\text{non}} \text{ esiste.}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) := \dfrac{x^2 - 2x}{(x+1)^2}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = x \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oppure $x = 2$
- Asintoti: $\cdot \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = 1 \Rightarrow y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

  $\cdot \lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \dfrac{(-1)^2 - 2\cdot(-1)}{0^+} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = -1$ è asintoto verticale per $x \to -1^\pm$
- Estremi Locali: $f'(x) = \dfrac{(x^2+2x+1)\cdot(2x-2) - 2\cdot(x+1)\cdot(x^2-2x)}{(x+1)^4}$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + 4x^2 + 2x - \cancel{2x^2} - 4x - 2 - 2\cdot(\cancel{x^3} + \underbrace{x^2 - 2x^2}_{= -x^2} - 2x)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{4x^2 + 2x - 2}{(x+1)^4} = \frac{2\cdot(2x^2 + x - 1)}{\underbrace{(x+1)^4}_{>0}} = 0$$

$\Leftrightarrow p(x) := 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 2}}{2\cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$

$= \begin{cases} -1 \notin X = \text{dominio di } f \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Inoltre vale: segno $f'(x) =$ segno $p(x)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ è un pto. di minimo locale.

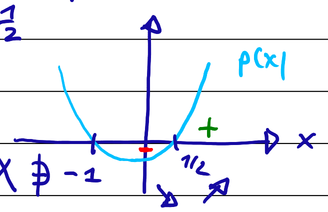


Grafico: