Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **22.1.24**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità in $x_0 \in (a,b)$ di una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la continuità di $f(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$.

Risposta

(i) f è continua in $x_0 \in (a,b)$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii)
- f è continua in $x_0 = 0$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^2}{|x|} = \lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0$

$x^2 = |x|^2$

$\Rightarrow$ f è continua in $x_0 = 0$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Lagange.

(ii) Trovare un punto di Lagrange per la funzione $f : [1,e] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x)$.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in (a,b)

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(detto punto di Lagrange)

(ii)
- f è derivabile in $[1,e]$.
- $f(1) = \ln(1) = 0$, $f(e) = \ln(e) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{f(1)-f(0)}{e-1} = \frac{1-0}{e-1} \overset{!}{=} \frac{1}{c}$

$\Rightarrow$ $c = e-1$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^2\cdot(e^x-1)} =: \ell$$

Risoluzione

- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0 \Rightarrow x^2\cdot(e^x-1) \sim x^2\cdot x = x^3$ per $x\to 0$
- Numeratore da sviluppare fino al 3° ordine:
  - $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x\cdot\cos(x) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
  - $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$.

$\Rightarrow x\cdot\cos(x) - \sin(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{2} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}\right)\cdot x^3 + o(x^3) \sim \frac{-2}{6}\cdot x^3 = -\frac{1}{3}\cdot x^3$ per $x\to 0$

$\Rightarrow \frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^2\cdot(e^x-1)} \sim \frac{-\frac{1}{3}\cdot\cancel{x^3}\,1}{\cancel{x^3}\,1} = -\frac{1}{3} = \ell$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cdot\cos(x^2)\,dx$$

Risoluzione

- Sostituzione $x^2 = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dt = 2x\,dx$
  $\Rightarrow x\cdot dx = \frac{dt}{2}$.

Quindi $\int x\cdot\cos(x^2)\,dx = \int \cos(t)\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sin(t) + c$

$= \frac{1}{2}\cdot\sin(x^2) + c$

$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cdot\cos(x^2) = \frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2}\left(\sin(\pi/2) - \sin(0)\right)$

$= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il piano tangente $p(x,y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (2,1)$ per la funzione $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x}$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

- $f(x_0,y_0) = \dfrac{e^{2\cdot 1}}{2} = \dfrac{e^2}{2}$

- $f_x(x,y) = \dfrac{x\cdot e^{xy}\cdot y - 1\cdot e^{xy}}{x^2} \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \dfrac{2\cdot 1\cdot e^{2\cdot 1} - e^{2\cdot 1}}{2^2}$
$= \dfrac{e^2}{4}$

- $f_y(x,y) = \dfrac{1}{\cancel{x}_1}\cdot e^{x\cdot y}\cdot \cancel{x}^{1} = e^{x\cdot y} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = e^{2\cdot 1} = e^2$

Quindi risulta

$$p(x,y) = \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4}\cdot(x-2) + e^2\cdot(y-1)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la derivabilità parziale rispetto a x e y in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{3x^2-2x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 3 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Derivabilità rispetto a x:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{3}\cancel{h^2}^{1} - 2h^{\cancel{3}}}{\cancel{h^2}_{1}} - \cancel{3}}{h} = -2$$

$\Rightarrow f$ è derivabile rispetto a x in $(x_0,y_0)=(0,0)$ con $f_x(0,0) = -2$

Derivabilità rispetto a x:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\underbrace{\frac{0}{h^2}}_{=0} - 3}{h} \quad \text{non converge}$$

$\Rightarrow f$ non è derivabile rispetto a y in $(x_0,y_0)=(0,0)$.

$\Rightarrow f$ non è derivabile parzialmente in $(x_0,y_0)=(0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 2}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

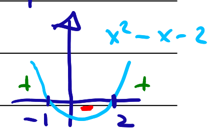
- Dominio X: $\quad x \in X \iff x^2 - x - 2 \neq 0$

  $\iff x \neq x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4\cdot 2}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

  $\Rightarrow X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

- Zeri: $f(x) = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$. Inoltre $f(0) = \frac{2}{-2} = -1$.

- Asintoti: $\bullet \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$



$\bullet \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dfrac{-1+2}{0^+} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-1+2}{0^-} = -\infty$

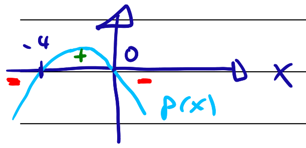
$\bullet \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{2+2}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{2+2}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ $x = -1$ e $x = 2$ sono asintoti verticali di f.

- Estremi locali:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x - 2)\cdot 1 - (2x - 1)\cdot(x+2)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{x^2 \cancel{-x} \cancel{-2} - 2x^2 \cancel{+x} - 4x \cancel{+2}}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$=: p(x)$



$$= \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-x\cdot(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2} = 0 \iff x = 0 \text{ opp. } x = -4$$

$(x^2 - x - 2)^2 > 0$

Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in

- $x = -4$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ $x = -4$ è un pto. di min locale
- $x = 0$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ $x = 0$ è un pto. di max locale

Grafico: