Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **22.11.13**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** .... **Canale** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ convergente.

(ii) Scrivere un esempio di serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ convergente.

Risposta

(i) vedi appunti

(ii) vedi appunti

Domanda 2

[4 punti]

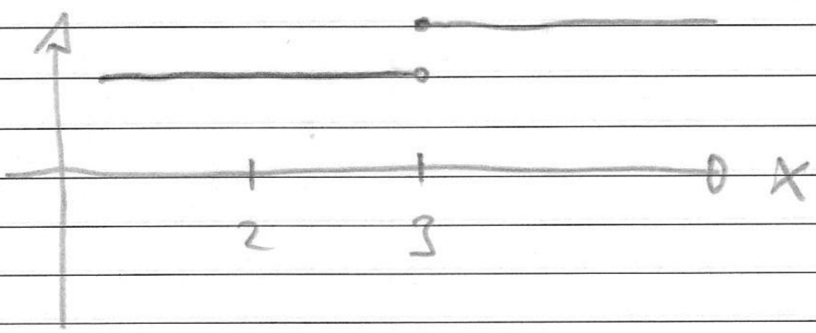
(i) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in x_0.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione continua in 2 e discontinua in 3.

Risposta

(i) vedi appunti

(ii)



Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \ln[1+\sin(x^2)]}{1-\cos(x^3)} =: h(x)$$

Risoluzione

$\bullet\ 1-\cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0 \overset{(t=x^3)}{\Longrightarrow} 1-\cos(x^3) \sim \frac{(x^3)^2}{2} = \frac{x^6}{2}$ per $x \to 0$

$\bullet\ \ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0 \overset{(t=\sin(x^2))}{\Longrightarrow} \ln(1+\sin(x^2)) \sim \sin(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow h(x) \sim \frac{x^4 \cdot x^2}{\frac{x^6}{2}} = \boxed{2 = \ell}$

Esercizio 2 (solo 8 e 9 CFU)

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso in cui sia convergente, calcolarne il valore.

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2}dx =: I = \lim_{c\to -\infty} \int_c^{-3} x^{-2}\,dx$$

Risoluzione

Allora, $\int_c^{-3} \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_c^{-3} = -\left((-3)^{-1} - c^{-1}\right)$, $c^{-1} \to 0$

$\to - \left(-\frac{1}{3} - 0\right) = \boxed{\frac{1}{3} = I}$

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare i punti critici della funzione $f(x) = x^x$, $x > 0$ e classificarli.

Risoluzione

vedi appunti (p. 58)

$x_0 = \frac{1}{e}$ è l'unico pto critico

= minimo assoluto

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = \ln(\cos(x))$.

Risoluzione

vedi appunti (p. 76)

$T_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-1}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio $= \left\{ \begin{array}{l} x-3 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{array} \right\} = \{ x \geq 3 \} = [3, +\infty)$

$f(3) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{\sqrt{x}\left(x^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x^{3/2}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$$

$y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-3}}(x^2-1) - \sqrt{x-3}\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{x^2-1-2\sqrt{x-3}\sqrt{x-3}\,2x}{2\sqrt{x-3}}}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2-1-4x(x-3)}{2\sqrt{x-3}\,(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2+12x-1}{2\sqrt{x-3}\,(x^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{3x^2-12x+1}{2\sqrt{x-3}\,(x^2-1)^2}$$

$3x^2-12x+1=0 \qquad x = \frac{6\pm\sqrt{33}}{3}$

$3x^2-12x+1$: $+\ +\ 0\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 0\ +\ +$

$0 \quad \uparrow \quad \frac{1}{3} \qquad\qquad 3 \quad \uparrow \quad 4$

$\frac{6-\sqrt{33}}{3} \qquad\qquad \frac{6+\sqrt{33}}{3}$

$f(x)$: $\nearrow\ \searrow$

$f'(x)$: $+\ 0\ -$

$3 \qquad \frac{6+\sqrt{33}}{3}$