Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **22.2.22**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

Firma: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Lagrange.

(ii) Calcolare i punti di Lagrange della funzione $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x \cdot \ln(x)$

Risposta

(i) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b). Allora esiste $c \in (a,b)$ (detto punto di Lagrange) tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(ii) • f è derivabile con $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

• $\frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{e \cdot \ln(e) - 1 \cdot \ln(1)}{e - 1} = \frac{e}{e-1} \overset{!}{=} \ln(c) + 1$

$\Leftrightarrow \ln(c) = \frac{e}{e-1} - 1 = \frac{e - e + 1}{e - 1} = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{c = e^{\frac{1}{e-1}}}} \in (e^0, e^1) = (1, e).$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Studiare la monotonia della funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x (t-1)(t+2) \cdot e^{-t^2} \, dt$

Risposta

(i) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita come

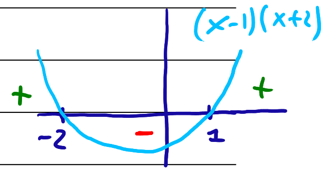
$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

è derivabile con $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

(ii) $f(t) := (t-1)(t+2) \cdot e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ è continua quindi per i) $F(x)$ è derivabile con $F'(x) = f(x) = (x-1) \cdot (x+2) \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{>0 \text{ sempre}} \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ opp. $x \geq 1$.

Quindi $F(x)$ è crescente in $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ e decrescente in $[-2, 1]$.



Esercizio 1

[5 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+\pi}-n}{n} =: a_n$$

Risoluzione

- $0 \le a_n = \frac{\sqrt{n^2+\pi}-n}{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+\pi}+n}{\sqrt{n^2+\pi}+n} = \frac{\cancel{n^2}+\pi\cancel{-n^2}}{n\cdot(\sqrt{n^2+\pi}+n)}$

  $\le \frac{\pi}{n^2} =: b_n$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \pi \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$\Rightarrow$ (per il criterio del confronto) anche la serie S converge

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \frac{x^2}{x+1}$ nel punto $x_0 = 1$.

Risoluzione

- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
- $f(x_0) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$
- $f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 2x - 1\cdot x^2}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{(1+1)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1^2}{(1+1)^2} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x-1)$

Esercizio 3 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cosh(x) - x}{\sin(x) - x} =: \ell$$

Risoluzione

- Denominatore: $\sin(x) - x = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} \cancel{-x} + o(x^3)$
$= -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}$ per $x \to 0$

- Numeratore: Da sviluppare fino al 3° ordine:

$e^x - \cosh(x) - x = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} \cancel{-1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} \cancel{-x} + o(x^3)$
$= \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ (per il principio di sostituzione)

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6}{-x^3/6} = -1$$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ della funzione $f(x,y) = x^2 - 2xy$ per il versore $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

Risoluzione

- f è C^1, quindi differenziabile.
Per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(2,1) = \frac{3}{5} \cdot f_x(2,1) - \frac{4}{5} \cdot f_y(2,1)$$

- $f_x(x,y) = 2x - 2y \Rightarrow f_x(2,1) = 2\cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$
- $f_y(x,y) = -2x \Rightarrow f_y(2,1) = -2 \cdot 2 = -4$

$$\Rightarrow D_v f(2,1) = \frac{3}{5} \cdot 2 - \frac{4}{5}(-4) = \frac{6+16}{5} = \frac{22}{5}$$

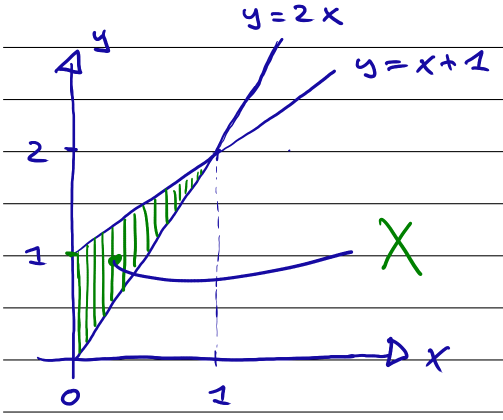
Esercizio 5

[6 punti]

Disegnare l'insieme $X := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 2x \le y \le x+1\right\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \underbrace{2xy}_{=f(x,y)}\, dx\, dy$$

Risoluzione



• f è continua e X è y-semplice quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=2x}^{x+1} 2xy\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} x \cdot \left[y^2\right]_{y=2x}^{x+1} dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot \left(\underbrace{(x+1)^2 - (2x)^2}_{= x^2+2x+1-4x^2 = -3x^2+2x+1}\right) dx$$

$$= \int_0^1 -3x^3 + 2x^2 + x\, dx$$

$$= \left[-3 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{-3\cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 6}{12} = \frac{-9+8+6}{12} = \frac{5}{12}$$