Domanda 1 [4 punti]

22.6.21

(i) Dare la definizione di continuità nel punto $x = x_0$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la continuità in $x_0 = 0$ di $f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} - 1 & \text{se } x \geq 0, \\ x \cdot \cos(\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Sol: (i) f è continua in x_0 se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii) • f è continua in $x_0 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to0^-} f(x)$.

• $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\sqrt{x}} - 1 = e^0 - 1 = 0$

• $f(0) = e^{\sqrt{0}} - 1 = 0$

• $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \underbrace{x}_{\to0} \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}_{\text{limitato}} = 0$

$\Rightarrow$ f è continua in $x_0 = 0$.

Domanda 2 [4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 7$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

Sol. (i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in (a,b) allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ii) • f è derivabile. Quindi per il test di monotonia f è strettamente crescente se $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

• $f'(x) = 3x^2 - 12x + 13 = 3\cdot(x^2 - 4x + 4) + 1$

$= 3\cdot\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0} + 1 \geq 1 > 0$

$\Rightarrow$ f è strettamente crescente.

Esercizio 1 [4 punti]

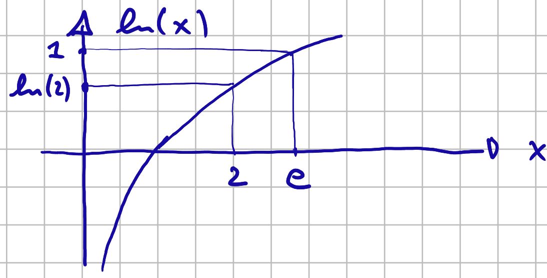
Studiare la convergenza della serie

$$S := \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 3}\right)\right)^n =: a_n$$

Sol: Si usa il criterio della radice: poiché ln è continua

- $\sqrt[n]{a_n} = \ln\left(\frac{2n^2-n+1}{n^2+2n+3}\right) \to \ln(2) =: q$ per $n \to +\infty$

  $\frac{2n^2-n+1}{n^2+2n+3} \to 2$ per $n \to +\infty$



- $q = \ln(2) < 1$

$\Rightarrow$ La serie S converge.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{2\sin(x)-\ln(1+2x)} =: \ell$$

Sol: Con Taylor:

- $\sin(x) = x + o(x^2) \Rightarrow 2\cdot\sin(x) = 2x + o(x^2)$ per $x \to 0$
- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0 \Rightarrow$ (ponendo $t = 2x$)

  $\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow 2\sin(x) - \ln(1+2x) = 2x - (2x - 2x^2) + o(x^2)$

$= 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ il numeratore è da sviluppare fino al $2°$ ordine.

- $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow$

  $\cosh(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.

Quindi per il principio di sostituzione segue

$$\frac{\cosh(x)-1}{2\cdot\sin(x)-\ln(1+2x)} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2} = \frac{1}{4} \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow \ell = \frac{1}{4}$.

Esercizio 3

[5 punti]

Determinare gli estremi locali di $f(x) := x \cdot e^{x-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Sol: Gli estremi locali di f si devono cercare tra

- i punti sul bordo del dominio (che non ci sono)
- i punti in cui f non è derivabile (che non ci sono)
- i punti critici di f.

Quindi si cercano i punti $x \in \mathbb{R}$ con $f'(x) = 0$:

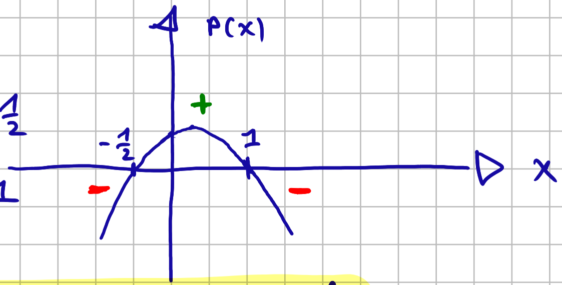
$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-x^2} + x \cdot e^{x-x^2} \cdot (1-2x) = \underbrace{e^{x-x^2}}_{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}} (1 + x - 2x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p(x) := -2 \cdot x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = x_{1/2} = \frac{-1 \pm \overset{=3}{\boxed{\sqrt{1+4\cdot 2}}}}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-1-3}{-4} = 1 \end{cases}$$

Quindi $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$ sono gli unici punti critici di f. Inoltre, vale che segno$(f(x))$ = segno$(p(x))$ e $p(x)$ cambia segno

- da "$-$" a "$+$" in $x_1 = -\frac{1}{2}$
- da "$+$" a "$-$" in $x_2 = 1$



$\Rightarrow$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ è un pto. di minimo di f,
$x_2 = 1$ è un pto. di massimo di f.

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ in $(x_0, y_0) = (1,1)$.

Sol: • L'equazione del piano tangente è

$$z = p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

per $(x_0,y_0) = (1,1)$.

- $f(1,1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. N.B. $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$
- $f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$$f_x(1,1) = \frac{-1}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2}$$

- $f_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$$f_y(1,1) = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$$

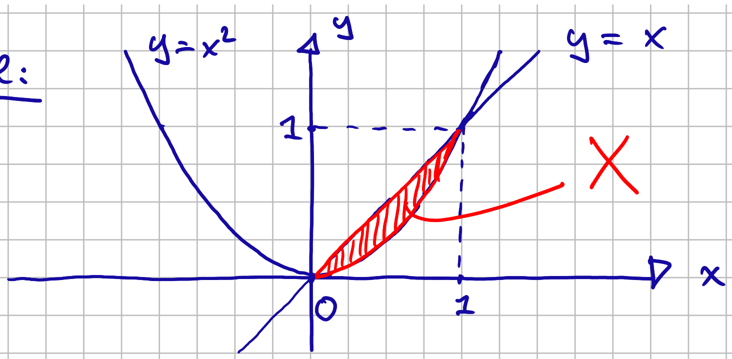
$$\Rightarrow \quad p(x,y) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

Esercizio 5 [6 punti]

Disegnare il dominio $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X x \cdot \sinh(y)\, dx dy$$

Sol:



$$x^2 = x \iff \underbrace{x^2 - x}_{x\cdot(x-1)} = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ opp. } x = 1.$$

Quindi $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ x \le y \le x^2\}$

è y-semplice. Inoltre, $f(x,y) = x \cdot \sinh(y)$ è continua,

quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} x \cdot \sinh(y)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} \left[x \cdot \cosh(y)\right]_{y=x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot (\cosh(x) - \cosh(x^2))\, dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x \cdot \cosh(x)\, dx}_{=: I_1} - \underbrace{\int_0^1 x \cdot \cosh(x^2)\, dx}_{=: I_2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{\cosh(x)}\, dx = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\sinh(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\sinh(x)}\, dx$$

$$= 1 \cdot \sinh(1) - 0 \cdot \sinh(0) - \cosh(x)\Big|_0^1$$

$$= \sinh(1) - \cosh(1) + \overbrace{\cosh(0)}^{=1}$$

$$= \sinh(1) - \cosh(1) + 1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{2x \cdot \cosh(x^2)}_{= (\sinh(x^2))'}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \sinh(x^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sinh(1) - \overbrace{\sinh(0)}^{=0}) = \frac{1}{2}\sinh(1)$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \sinh(1) - \cosh(1) + 1 - \frac{1}{2}\sinh(1)$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(1) - \cosh(1) + 1 = I$$