Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **23.11.10**

Domanda 1 [2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Dire se $c = e$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{Q}$.

Risposta

(i) $c \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ è un pto. di acc. di X, se $\exists$ una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

- $x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $x_n \neq c \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} x_n = c$.

(ii) Sì, visto che $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, $x_n \neq e \ \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Domanda 2 [2+3 punti]

(i) Enunciare il criterio del confronto asintotico per le serie numeriche.

(ii) Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$.

Risposta

(i) Sia $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente. Se esiste finito il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} =: \ell$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Se $\ell \neq 0$ allora vale $\Leftrightarrow$

(ii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \Rightarrow \sin(x) - x = \frac{-x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6} \quad (x \to 0)$

Quindi $a_n := \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^3} \Rightarrow$

$|a_n| \sim \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^3}$. Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ converge assolutamente.

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia data la funzione $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Allora $(f^{-1})'(\overset{y_0}{\overset{\shortparallel}{0}})$ vale

[a] π [~~b~~] $\frac{1}{2}$ [c] 1 [d] $+\infty$

Risoluzione

Vale $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ con $y_0 = f(x_0)$. Visto che $f(\underset{\shortparallel}{\overset{x_0}{}}\!\!-1) = \overset{y_0}{\overset{\shortparallel}{0}}$ segue $x_0 = -1$. Inoltre $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$ $f'(x_0) = f'(-1) = 3 - 2 + 1 = 2 \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia $u \in C^5(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x\to 0} \frac{u(x) - \ln^3(1+x)}{x^4} = 0$. Allora per $x \to 0$, $u(x) = o(x^k)$ per

[~~a~~] $k = 2$ [b] $k = 3$ [c] $k \geq 4$ [d] non si può dire

Risoluzione

Da $\ln(1+x) \sim x$ segue $\ln^3(1+x) \sim x^3 \Rightarrow$ anche $u(x) \sim x^3$, altrimenti $u(x) - \ln^3(1+x) \neq o(x^4)$. Così risulta $u(x) = o(x^2)$ e $u(x) \neq o(x^4)$ per $k > 2$.

Esercizio 3 **[4 punti]**

Il polinomio di Mc Laurin di ordine 4 della funzione $f(x) = x \cdot \ln(\cos(x))$ è dato da

[a] 0 [b] $\frac{x^2}{2}$ [~~c~~] $-\frac{x^3}{2}$ [d] $\frac{x^4}{3!}$

Risoluzione

Da $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$ e
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$ segue con

$t = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$:

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 + \overbrace{(\cos(x)-1)}^{=t}) = (\cos(x)-1) + \frac{(\cos(x)-1)^2}{2} + \overbrace{o(\underbrace{(\cos(x)-1)^2}_{\sim(\frac{x^2}{2})^2})}^{=o(x^3)}$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2}{2} + o(x^3)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \Rightarrow x \cdot \ln(\cos(x)) = \underbrace{-\frac{x^3}{2}}_{\overset{\shortparallel}{T_4(x)}} + o(x^4)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^3}\cdot\int_0^x \sin(t^2)\,dt\right]$$

Risoluzione X

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{x^3}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

usando il teorema fond. del calc. int. e l'Hospital

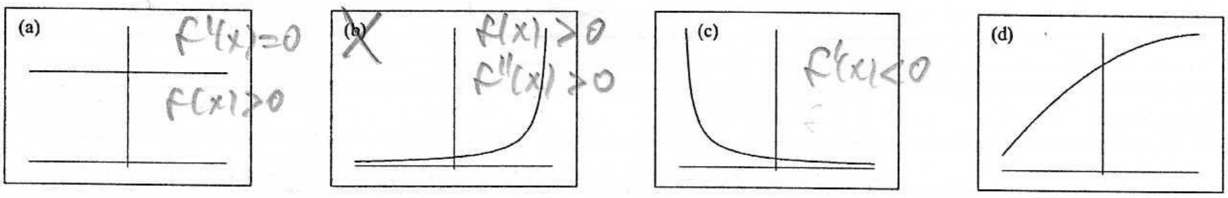
$$\overset{(H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

$\to 1$

Esercizio 5

[4 punti]

Sia f non negativa e derivabile tale che $f'(x)=f^2(x)$. Allora parte del grafico di f è dato da



$f(x)>0$
$f''(x)<0$

Risoluzione

$f'(x)=f^2(x)\geq 0 \Rightarrow f$ è crescente,

in particolare è strett. crescente se $f(x)>0$

$\Rightarrow$ da escludere sono a) & c). Inoltre

vale $f''(x)=2f(x)\cdot\underbrace{f'(x)}_{\geq 0} \Rightarrow f(x)$ e

$f''(x)$ hanno lo stesso segno $\Rightarrow$ non d)

$\Rightarrow$ Sol.: $\boxed{b}$

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = 2$$

Risoluzione

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + \text{const.}$$

Sost.: $\sin(x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \cos(x) \Rightarrow dt = \cos(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left[2\cdot\sqrt{\sin(x)}\right]_{x=a}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(\sqrt{\sin(\pi/2)} - \sqrt{\sin(0)}\right)$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

Regole per sostenere l'esame

- Non si possono usare appunti, libri, calcolatrice,
- I cellulari devono essere spenti.
- Il punteggio minimo per superare la prova è **18**.