Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **23.6.08**

Cognome: ..... **Nome:** .....

Matricola: ..... **Corso di Laurea:** .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Dire se la successione $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } n \text{ pari,} \\ \sqrt[n]{n} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$ converge.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il teorema del gradiente.

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ammette minimo e massimo in $[a, b]$ allora

- [a] esiste $M > 0$ tale che $-M < f(x) < M$ per ogni $x \in [a, b]$
- [b] f è derivabile
- [c] esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f'(x_0) = 0$
- [d] f è continua

Risoluzione

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte con continuità e sia $P_0 := (x_0, y_0)$ un punto critico di f. Allora P_0 è un punto di sella di f se

- [a] $f_{xy}(P_0) \neq 0$
- [b] $f_{xx}(P_0) \cdot f_{yy}(P_0) = 0$ e $f_{xy}(P_0) > 0$
- [c] $f_{xx}(P_0) < 0$ e $f_{xy}(P_0) \neq 0$
- [d] $f_{xx}(P_0) \cdot f_{yy}(P_0) > 0$ e $f_{xy}(P_0) < 0$

Risoluzione

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln^3(1 + 2x)\sin(x)}{e^x\big(1 - \cos(2x)\big)^2}$$

Risoluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora

$\boxed{\text{a}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ diverge

$\boxed{\text{b}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

$\boxed{\text{c}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ diverge se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ diverge

$\boxed{\text{d}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(2x+1)^2}\,dx$.

Risoluzione

Esercizio 6

[4 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (3 - x - y) \cdot e^{xy}$ e classificarli.

Risoluzione