Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **23.1.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di serie convergente alla somma $s \in \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di una serie convergente, ma non assolutamente convergente.

Risposta

(i) Sia $s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_n$ per $n \in \mathbb{N}$.

Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s \in \mathbb{R}$, cioè la serie converge ad s, se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$

(ii) La serie di Leibniz $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ converge ma non converge assolutamente visto che $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ diverge.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Sia $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di derivabilità di f nel punto $x_0 \in (0, \pi)$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente a $f(x) = \sin(-3x^2)$ nel punto $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Risposta

(i) f è derivabile in x_0 se il limite

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$ converge

(ii) • $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

• $f(x_0) = \sin\left(-3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

• $f'(x) = \cos(-3x^2) \cdot (-6x) \Rightarrow f'(x_0) = \overbrace{\cos\left(-3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}^{= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0} \cdot \left(-6\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{t(x) = 1 + 0 \cdot \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1, \ x \in \mathbb{R}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Determinare l'estremo inferiore e, se esiste, il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \underbrace{\sqrt{n^2+1} - n}_{=: a_n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Risoluzione

- $a_n = f(n)$ per $f(x) := \sqrt{x^2+1} - x$, $x \geq 0$
- $f'(x) = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{x - \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

$\Rightarrow$ f è strettamente decrescente

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente decrescente

$\Rightarrow$ $\inf A = \lim_{n \to +\infty} a_n$, $\boxed{\text{min A non esiste}}$

- $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^2+1} + n} \cdot (\sqrt{n^2+1} + n) = \frac{\cancel{n^2} + 1 - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1} + n} \to 0$ per $n \to +\infty$

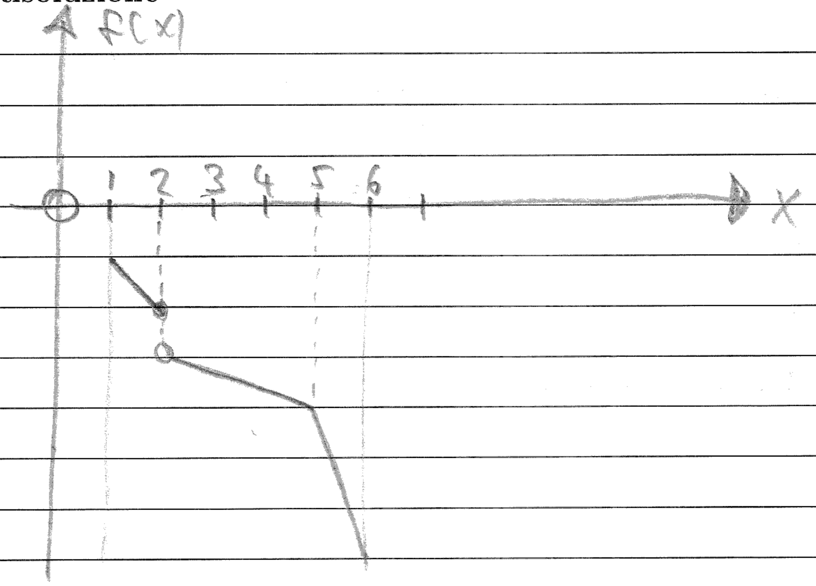
Quindi $\boxed{\inf A = 0}$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [1, 6] \to (-\infty, 0]$ con massimo assoluto in $x = 1$, con una discontinuità in $x = 2$, decrescente in $(2, 6)$, continua e non derivabile in $x = 5$.

Risoluzione



Esercizio 3 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln(1+x) - 1}{1-\cos x} =: ⊛$$

Risoluzione

- $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$
- numeratore da sviluppare fino al 2° ordine:
  - $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \Rightarrow e^{-x/2} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$ per $x\to 0$
  - $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x) = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow ⊛ \sim \dfrac{\cancel{1}-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{8}+\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{x^2}{4}-\cancel{1}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}} \sim \dfrac{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$ per $x\to 0$

$\Rightarrow \boxed{\ell = -\frac{1}{4}}$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \cos\sqrt{2x}\,dx.$$

Risoluzione

Sostituzione: $t := \sqrt{2x} \Leftrightarrow x = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = t$

$\Rightarrow dx = t\cdot dt$

- $x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2\cdot 0}=0$; $x=\frac{\pi^2}{2} \Rightarrow t=\sqrt{\pi^2}=\pi$

Quindi $I = \int_0^\pi \underbrace{t}_{f}\cdot\underbrace{\cos(t)}_{g'}\,dt \overset{\text{i.p.p.}}{=} \left[\underbrace{t\cdot\sin(t)}_{f\cdot g}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{1\cdot\sin(t)}_{f'\cdot g}\,dt$

$= \underbrace{[\pi\cdot\overbrace{\sin(\pi)}^{=0} - 0\cdot\sin(0)]}_{=0} + \cos(t)\Big|_0^\pi$

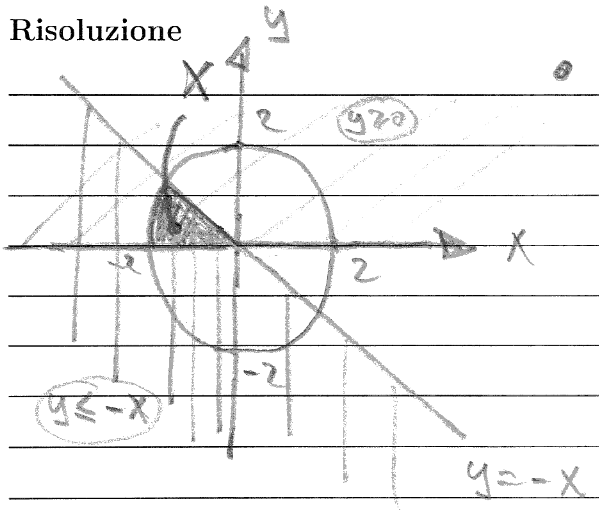
$= \cos(\pi)-\cos(0) = -1-1 = \boxed{-2}$

Esercizio 5 **[5 punti]**

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq -x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X x \, dx \, dy.$$

Risoluzione



- X corrisponde a $X' := [0,2] \times [\frac{3}{4}\pi, \pi]$ in coordinate polari

- $$I = \iint_{X'} \overbrace{\rho \cdot \cos\vartheta}^{=x} \cdot \rho \cdot d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_0^2 \rho^2 \cdot \cos\vartheta \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 \cdot \cos\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \left[\sin\vartheta \right]_{3/4\pi}^{\pi} = \frac{8}{3} \cdot \left(\overbrace{\sin(\pi)}^{=0} - \overbrace{\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= -\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-\frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}}$$