Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 23.1.18

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di serie divergente alla somma $+\infty$.

(ii) Dare un esempio di una serie convergente e assolutamente convergente.

Risposta

(i) Sia $S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$ per $n \in \mathbb{N}$.

Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$, cioè la serie diverge a $+\infty$,

se $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

(ii) P.e. la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ converge e

converge anche assolutamente visto che $\left| \frac{1}{k \cdot (k+1)} \right| = \frac{1}{k \cdot (k+1)}$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Sia $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di derivabilità di f nel punto $x_0 \in (0, \pi)$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente a $f(x) = \cos(2x^2)$ nel punto $x_0 = \sqrt{\pi}$.

Risposta

(i) Cfr. compito A

(ii)
- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- $f(x_0) = \cos(2 \cdot \pi) = \cos(0) = 1$
- $f'(x) = -\sin(2x^2) \cdot 4x \Rightarrow f'(x_0) = -\underbrace{\sin(2\pi)}_{= \sin(0) = 0} \cdot 4 \cdot \sqrt{\pi} = 0$

$\Rightarrow \boxed{t(x) = 1 + 0 \cdot (x - \sqrt{\pi}) = 1, \; x \in \mathbb{R}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Determinare l'estremo superiore e, se esiste, il massimo dell'insieme

$$A = \Big\{ \underbrace{n - \sqrt{n^2+2}}_{=:\, a_n} : n \in \mathbb{N} \Big\}$$

Risoluzione

- $a_n = f(n)$ per $f(x) := x - \sqrt{x^2+2}$, $x \geq 0$
- $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+2} - x}{\sqrt{x^2+2}} > \dfrac{\sqrt{x^2} - x}{\sqrt{x^2+2}} = 0$

$\Rightarrow$ f è strettamente crescente

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente

$\Rightarrow$ $\sup A = \lim_{n\to+\infty} a_n$, $\boxed{\max A \text{ non esiste}}$

- $a_n = \dfrac{(n - \sqrt{n^2+2})}{n+\sqrt{n^2+2}} \cdot (n + \sqrt{n^2+2}) = \dfrac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} - 2}{n+\sqrt{n^2+2}} \to 0$ per $n \to +\infty$

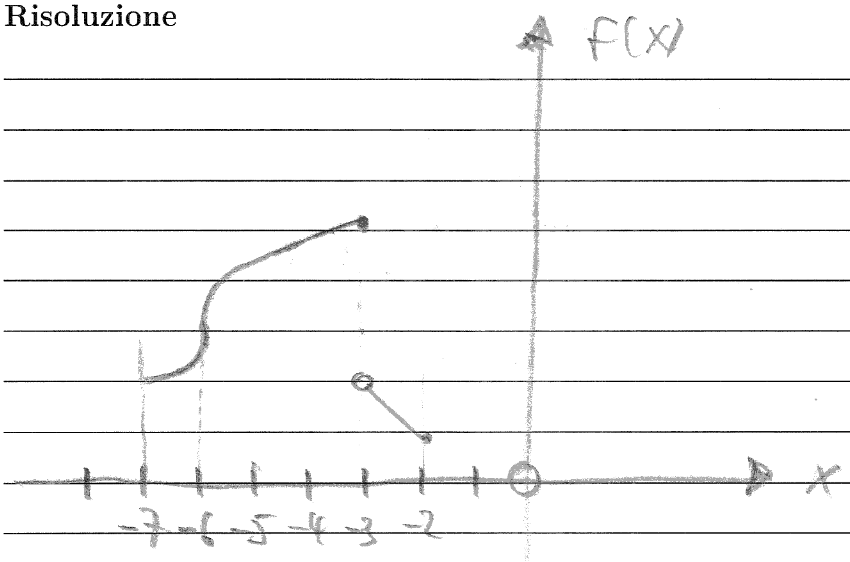
Quindi $\boxed{\sup A = 0}$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [-7, -2] \to [0, +\infty)$ crescente in $[-7, -3]$, continua e non derivabile in $x = -6$, con una discontinuità in $x = -3$ e con minimo assoluto in $x = -2$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{2} - \sin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}}{\ln(1+x^2)}$$

Risoluzione

• $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0 \Rightarrow \ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{2} - \sin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}}{x^2} \quad \left(= \frac{\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{2} - \cos(\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2}}{2x} \quad \left(= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{2} + \sin(\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{4} = \ell}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx.$$

Risoluzione

• Sostituzione $\sqrt{x} =: t \Leftrightarrow x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t$

$\Rightarrow$ • $dx = 2t \cdot dt$

• $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{0} = 0$, $x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}$

Quindi $I = 2\int_0^{\pi/2} \underset{f}{t} \cdot \underset{g'}{\sin(t)}\,dt \overset{(i.p.p.)}{=} 2\cdot\left(\left[\underset{f\cdot g}{t\cdot(-\cos t)}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\cdot(-\cos t)\,dt \right)$

$$= 2\cdot\left(\underbrace{\underbrace{\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - 0\cdot(-\cos(0))}_{=0} + \sin(t)\Big|_0^{\pi/2} \right)$$

$$= 2\cdot\left(\sin(\pi/2) - \sin(0)\right) = \boxed{2}$$

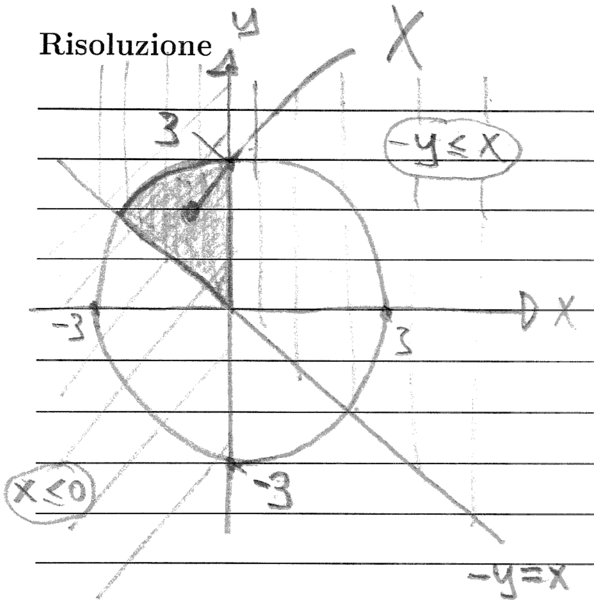
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, -y \leq x \leq 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X y \, dx \, dy.$$

Risoluzione



X corrisponde a

$X' := [0,3] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]$

in coordinate polari.

$$\cdot\ I = \iint_{X'} \overbrace{\rho \cdot \sin\vartheta}^{=y} \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^3 \rho^2 \cdot \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_{\pi/2}^{3/4\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta = 9 \cdot \left[-\cos\vartheta\right]_{\pi/2}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= 9 \cdot \Big(-\overbrace{\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \overbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}^{=0}\Big)$$

$$= \boxed{\frac{9}{2} \cdot \sqrt{2}}$$