Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **23.7.13**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** .... **Canale** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza assoluta per una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Fare un esempio di una serie tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2$.

Risposta

(i) vedi appunti

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} (1/2)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$ oppure

$1+1+0+0+0+\ldots = 2$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) > 0$. Allora

- [a] f non ha zeri
- [b] ☒ $\sup\{f(x) : x \in (a,b)\} < +\infty$
- [c] $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$
- [d] non vale nessuna delle risposte precedenti

Risposta

(i) vedi appunti

(ii) Ogni funzione $f \in C[a,b]$ è limitata (per Weierstraß)

$\Rightarrow$ b)

N.B.: la risposta a) è sbagliata!!!

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e^{\frac{1}{x}} + \sin(\pi x)}{\ln(x^2)}$$

Risoluzione

Con la l'Hospital segue:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e^{1/x} + \sin(\pi x)}{\underbrace{\ln(x^2)}_{=2\cdot\ln(x)}} \left(= \frac{e - e + 0}{0} = \frac{0}{0} \right) \overset{(H)}{=}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x + e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2} + \cos(\pi x)\cdot\pi}{2\cdot 1/x} = \frac{e + e\cdot\frac{1}{1^2} + (-1)\cdot\pi}{2}$$

$$= e - \pi/2$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_1^e \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{\ln(x)}}\,dx =: I$$

Risoluzione

Con la sostituzione $t = \ln(x)$ segue: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} dt$$

$$= \int_0^1 t^{-1/3} dt = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{3}{2}\cdot t^{\frac{2}{3}}\right]_{t=a}^{t=1}$$

- $\frac{dx}{x} = dt$
- $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$
- $x = e \Rightarrow t = \ln(e) = 1$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{3}{2}\left(1 - a^{2/3}\right) = \frac{3}{2}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare i punti (x_0, y_0) in cui il piano tangente al grafico di $f(x,y) = (x-y)\cdot e^{xy}$ è orizzontale.

Risoluzione

Il piano tangente è orizzontale in $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (0,0)$.

$f_x(x,y) = 1\cdot e^{x\cdot y} + (x-y)\cdot e^{x\cdot y}\cdot y = (1+xy-y^2)\cdot e^{xy} \overset{!}{=} 0$

$f_y(x,y) = -1\cdot e^{x\cdot y} + (x-y)\cdot e^{xy}\cdot x = (-1-xy+x^2)\cdot e^{xy} \overset{!}{=} 0$

$e^{xy} \neq 0 \ \forall (x,y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+xy-y^2 = 0 \\ -1-xy+x^2=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2=0 \Rightarrow x=y$ o/p. $x=-y$

$x=y$: $\quad 1+xy-y^2 = 1+x^2-y^2 = 0$ Mai!

$x=-y$: $\quad 1+xy-y^2 = 1-y^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 2 punti

Cercati sono: $(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(x_1,y_1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|2x^4-5y^3|}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Continuità (in coord. pol.): $|f(\rho\cdot\cos\vartheta, \rho\cdot\sin\vartheta)| = \frac{|2\cdot\cos^4(\vartheta)\cdot\rho^{\cancel{4}\,2} - 5\cdot\sin^3\vartheta\cdot\rho^{\cancel{3}\,1}|}{\cancel{\rho^2}}$

$\leq \rho\cdot(2+5) = 7\cdot\rho \to 0$ per $\rho\to 0$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ è continua in $(0,0)$.

Derivabilità: $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{|2h^4|}{h^2} - 0}{h} = 0$

$\frac{|2h^4|}{h^2} = 2|h|$

$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{|-5h^3|}{h^2} - 0}{h}$ non esiste

$= \frac{5\cdot|h|}{h} = \begin{cases} +5 & \text{se } h>0 \\ -5 & \text{se } h<0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ non è derivabile

$\Rightarrow f$ non è differenziabile.

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + x - 2}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

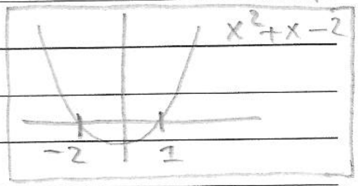
Risoluzione

Dominio: $x \in \mathrm{dom}(f) \Leftrightarrow x^2+x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2, +1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+x-2} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 1 \\[2mm] \dfrac{-x}{x^2+x-2} & \text{se } x < 0,\ x \neq -2 \end{cases}$$

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Asintoti: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.



$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) &= \frac{2}{0^{\mp}} = \mp\infty \\ \lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) &= \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -2 \text{ e } x = 1 \text{ sono asint. verticali}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+x-2)\cdot 1 - (2x+1)\cdot x}{(x^2+x-2)^2} = \underbrace{\dfrac{-(x^2+2)}{(x^2+x-2)^2}}_{<0 \text{ sempre}} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ è decrescente} \\ \text{per } x > 0 \end{array} \right. \\[4mm] -\left(\text{———} \ \text{''} \ \text{———} \right) = \underbrace{\dfrac{x^2+2}{(x^2+x-2)^2}}_{>0 \text{ sempre.}} & \text{se } x < 0,\ x \neq -2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ è crescente} \\ \text{per } x < 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{h}{h^2+h-2} - 0}{h} = -1/2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq \\ f'_-(0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{-h}{h^2+h-2} - 0}{h} = 1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ è un pto. angoloso.}$$

Inoltre $x_0 = 0$ è un pto. di massimo locale

Grafico: