Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **23.7.13**

Cognome.............................**Nome**..................................**A.A.**..........

Matricola.............................**Corso di Laurea**........................ **Canale** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Firma:..............................

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza semplice per una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Fare un esempio di una serie tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

Risposta

(i)

vedi appunti

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (serie di Mengoli) oppure

$1+0+0+0+0+0+\ldots = 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) > 0$. Allora

$\boxed{a}$ $\inf\{f(x) : x \in (a, b)\} > -\infty$ $\boxed{b}$ $f(a) < 0$ e $f(b) < 0$

$\boxed{c}$ f non ha zeri $\boxed{d}$ non vale nessuna delle risposte precedenti

Risposta

(i)

vedi appunti

(ii) $f \in C[a,b]$ è limitata (per Weierstraß)

$\Rightarrow$ a)

N.B: c) è sbagliata!!!

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2} - e^{\frac{1}{x}} + \ln(x)}{\sin(\pi x)}$$

Risoluzione

Con l'Hospital segue:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2} - e^{1/x} + \ln(x)}{\sin(\pi x)} \left(= \frac{e^1 - e^1 - 0}{0} = \frac{0}{0} \right) \overset{(H)}{=}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2}\cdot 2x - e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1/x}{\cos(\pi\cdot x)\cdot \pi} = \frac{e\cdot 2 + e + 1}{-\pi}$$

$$= -\frac{3e+1}{\pi}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale ~~improprio~~ definito

$$\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln(x)}}{x}\,dx$$

Risoluzione

Con la sostituzione $t = \ln(x)$ segue $dt = \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln(x)}}{x}\,dx = \int_{\dots}^{\dots} t^{1/3}\,dt = \frac{3}{4}t^{4/3}\Big|_{\dots}^{\dots}$$

$$= \frac{3}{4}\ln(x)\Big|_1^e = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare i punti (x_0, y_0) in cui il piano tangente al grafico di $f(x,y) = (x+y)\cdot e^{-xy}$ è orizzontale.

Risoluzione

Si procede come nel compito A:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = (1-xy-y^2)e^{-xy} \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y(x,y) = (1-xy-x^2)e^{-xy} \stackrel{!}{=} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$\Rightarrow x = \pm y$

$\underline{x=y}$: $1-xy-y^2 = 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1/2} = y$

$\underline{x=-y}$: $1-xy-y^2 = 1+y^2-y^2 = 0$ Mai!

$\Rightarrow$ I punti cercati sono $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e

$(x_1, y_1) = \left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|4x^3 - 3y^4|}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Procedendo come nel compito A segue:

- f è continua in $(0,0)$ (usare le coord. polari)
- f <u>non</u> è derivabile rispetto ad x in $(0,0)$
  f è derivabile rispetto ad y in $(0,0)$

$\Rightarrow f$ non è derivabile $\Rightarrow$

- f <u>non</u> è differenziabile.

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - x - 2}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Si procede come nel compito A. Così si ottiene:

- dominio di $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$
- $f(x) = 0 \iff x = 0$
- $x = -1$ e $x = 2$ sono asintoti verticali
  $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$
- $f'(x) > 0 \quad \forall x < 0,\ x \neq -1 \implies f$ è crescente in $\mathbb{R}_-$
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \geq 0,\ x \neq 2 \implies f$ è decrescente in $\mathbb{R}_+$
- $f'_+(0) = -1/2$, $f'_-(0) = +1/2 \implies x_0 = 0$ è un pto. angoloso
- $x_0 = 0$ è un pto. di max. locale

Grafico: