Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **24.2.10**

Domanda 1 [3+2 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione per un insieme D e descrivere i punti di accumulazione dell'insieme $(3, 5]$.

(ii) Dare la definizione di $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.

Risposta

(i) $c \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di D se $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.c.

• $x_n \in D \;\forall n \in \mathbb{N}$, • $x_n \neq c \;\forall n\in\mathbb{N}$, • $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$

(ii) [c è di acc. di $(3,5] \iff c \in [3,5]$.

$\lim_{x\to 3} f(x) = 5 \iff \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X =$ dominio di f con $x_n \neq 3\;\forall n$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 5$.

Domanda 2 [2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x)$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in D$, allora f è costante in D?

Risposta

(i) Se esiste finito $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ (= dominio di f)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f(x_0)$$ si dice che

f è derivabile con derivata f'.

(ii) NO! Ciò vale soltanto se il dominio di f è un intervallo! P.e. $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$ è derivabile con $f'(x) = 0\;\forall x \neq 0$

ma non è costante.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^1(a,b)$ tale che f é strettamente monotona e siano $m := \inf\limits_{(a,b)} f$, $M := \sup\limits_{(a,b)} f$. Allora

[a] $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ [b] $f : (a,b) \to [m,M]$ é suriettiva

☒ [c] $f : (a,b) \to (m,M)$ é biettiva [d] se esiste $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$, allora $f(a) = f(b)$

Risoluzione (per esclusione → capito 1-B)

Per il teorema degli zeri f è suriettiva mentre la stretta monotonia implica che f è iniettiva $\Rightarrow$ f è biettiva cioè invertibile

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $a_n = (-1)^n \cdot (1 - e^{-n})$. Allora

☒ [a] $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_0} - 1| < \epsilon$ [b] $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

[c] $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - 1| < \epsilon$ per ogni $n < n_0$ [d] $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

Risoluzione

$e^{-n} \to 0$ $(n \to +\infty)$. Inoltre per n pari vale

$a_n = 1 - e^{-n} \Rightarrow |a_n - 1| = e^{-n}$ per n pari

Quindi dato $\varepsilon > 0$ per n sufficientemente grande e pari vale c.

Esercizio 3

[3 punti]

continua in $x = 1$.

La funzione $f(x) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right)$ é integrabile in senso improprio su $(1, +\infty)$

[a] per $\alpha > 1$ [b] per $\alpha > 0$ ☒ [c] $\alpha > 2$ [d] per nessun α

Risoluzione

Se $\alpha \leq 0$ allora $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \geq 1 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ non è integrabile.

Se $\alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \to 0 \quad (x \to +\infty) \Rightarrow$

$x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right) \sim x \cdot \frac{1}{x^\alpha} = x^{1-\alpha}$ per $x \to +\infty$

Visto che $\int_1^{+\infty} x^\beta\, dx$ converge $\Leftrightarrow \beta < -1$ segue

che $\int_1^{+\infty} f(x)$ converge $\Leftrightarrow 1 - \alpha < -1 \Leftrightarrow 2 < \alpha \Leftrightarrow \alpha > 2$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\cdot \ln^3(1+2x)}{(e^x-1)\cdot\big(1-\cos(x)\big)^2} = h(x)$$

Risoluzione

$$h(x) = \frac{\overbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}^{\to 1}\cdot \cancel{x^2}\cdot \overbrace{\left(\frac{\ln(1+2x)}{2x}\right)^3}^{\to 1}\cdot \overbrace{(2x)^3}^{=8\cdot \cancel{x^3}}}{\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1}\cdot \cancel{x}\cdot \underbrace{\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)^2}_{\frac{1-\cos(x)}{x^2}\to\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \to\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot \cancel{x^4}} \to \frac{8}{1/4} = \underline{\underline{32}}$$

$(x \to 0)$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare sup e inf di $f(x) = \frac{x^2}{\ln^2(x)}$ in $(0,+\infty)$.

Risoluzione

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0$. Inoltre

$f(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)^2 \geq 0 \ \forall x \Rightarrow \inf f = 0$

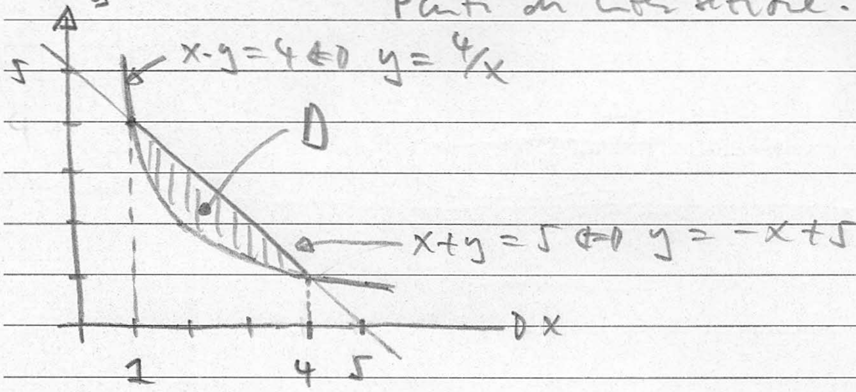
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty.$

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare la regione D del primo quadrante delimitata dalla retta $x + y = 5$ e dall'iperbole $xy = 4$ e calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$.

Risoluzione



Punti di intersezione: $\frac{4}{x} = -x + 5 \Leftrightarrow$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1,\ x = 4$

Quindi il dominio è y-semplice:

$$D = \{(x,y) \mid x \in [1,4],\ \frac{4}{x} \leq y \leq -x+5 \} \xRightarrow{\text{Fubini-Tonelli}}$$

$$\iint_D x \cdot y \, dx\, dy = \int_1^4 \int_{4/x}^{-x+5} x \cdot y \, dy\, dx = \int_1^4 \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=4/x}^{y=-x+5} \right) dx$$

$$= \int_1^4 \frac{x}{2} \left((-x+5)^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 \right) dx = \int_1^4 \frac{x}{2} \cdot (x^2 - 10x + 25) - \frac{8}{x} \, dx$$

$$= \int_1^4 \frac{x^3}{2} - 5x^2 + \frac{25}{2}x - \frac{8}{x} \, dx = \left[\frac{x^4}{4 \cdot 2} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{25}{2 \cdot 2}x^2 - 8\ln(x) \right]_1^4$$

$$= \frac{4^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{4} \cdot 2} - \frac{5 \cdot 4^3}{3} + \frac{25 \cdot 4^{\cancel{2}}}{\cancel{4}} - 8 \cdot \ln(4) - \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{3} + \frac{25}{4} - 8 \cdot 0 \right)$$

$$= \ldots = \frac{165}{8} - 16 \cdot \ln(2)$$