Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 24.2.10

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione per un insieme D e descrivere i punti di accumulazione dell'insieme $[2, 7)$.

(ii) Dare la definizione di $\lim_{x \to 7} f(x) = 2$.

Risposta

(i) Def. pnto di acc. → Compito 1-A.

c è un pto. di acc. di $[2,7)$ $\Leftrightarrow$ $c \in [2,7]$

(ii) $\lim_{x \to 7} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \forall x \in X =$ dominio di f con $0 < |x-7| < \delta$.

(Def. con successioni → Compito 1-A)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x)$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in D$, allora f è costante in D?

Risposta

(i) Cfr. Compito 1-A

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^1(a,b)$ tale che f é strettamente monotona e siano $m := \inf_{(a,b)} f$, $M := \sup_{(a,b)} f$. Allora

- ~~a~~ $f : (a,b) \to (m,M)$ é invertibile
- b $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$
- c se esiste $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$, allora $f(a) = f(b)$
- d $f : (a,b) \to [m,M]$ é biettiva

Risoluzione (diretta $\to$ Capitolo 1-A)

Non b) poiché non si sa se f è crescente opp. decrescente. c) non ha senso poiché $a, b \notin$ dominio di $f = (a,b)$. Non d) p.e. $f:(0,1) \to [0,1]$, $f(x) = x$ non è suriettiva
$\quad 0 = \inf f,\ 1 = \sup f$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $a_n = (-1)^n \cdot (\pi^{-n} - 1)$. Allora

- a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
- b $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n + 1| < \epsilon$ per ogni $n > n_0$
- c $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- ~~d~~ $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_0} + 1| < \epsilon$

Risoluzione

Per n pari vale $a_n = \pi^{-n} - 1 \to -1$ per $n \to +\infty$

Quindi dato $\varepsilon > 0$ per n sufficientemente grande e pari vale $|a_n + 1| = |\underbrace{\pi^{-n}}_{\to 0\ (n\to+\infty)}| < \varepsilon$.

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x}$ é integrabile in senso improprio su $(0,1)$

Continua in $x=1$, eventuale asintoto verticale in $x=0$.

- a per $\alpha > 1$
- ~~b~~ per $\alpha > 0$
- c $\alpha > 2$
- d per nessun α

Risoluzione

Per $\alpha \leq 0$ segue $x^\alpha \geq 1\ \forall x \in (0,1)$ e quindi $f(x) \geq \frac{\ln(2)}{x}$. Visto che $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge, diverge anche $\int_0^1 f(x)\,dx$ per il criterio del confronto.

Se $\alpha > 0$, allora $x^\alpha \to 0$ per $x \to 0$ e quindi $\ln(1+x^\alpha) \sim x^\alpha$ per $x \to 0^+$. Quindi $f(x) \sim x \cdot x^\alpha = x^{\alpha+1}$.

Inoltre $\int_0^1 x^\beta\,dx$ converge $\Leftrightarrow \beta > -1$ e quindi

$\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha + 1 > -1 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

Esercizio 4

[4 punti]

$h(x)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\cdot(\cos(x)-1)^2}{\sin(x^3)\cdot \ln^2(1-2x)}$$

Risoluzione

$$h(x) = \frac{\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1}\cdot \cancel{x}\cdot \Big(\underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to 1/2}\Big)^2\cdot \cancel{x^4}}{\underbrace{\frac{\sin(x^3)}{x^3}}_{\to 1}\cdot \cancel{x^3}\cdot \Big(\underbrace{\frac{\ln(1-2x)}{-2x}}_{\to 1}\Big)^2\cdot 4\cancel{x^2}} \to \frac{1/4}{4} = \frac{1}{16}$$

$\to \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$

$\to 1^2 = 1$

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare sup e inf di $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$ in $(0, +\infty)$.

Risoluzione

- $f(1) = 0$, inoltre $f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 \geq 0 \quad \forall x$

  $\Rightarrow \min f = \inf f = 0.$

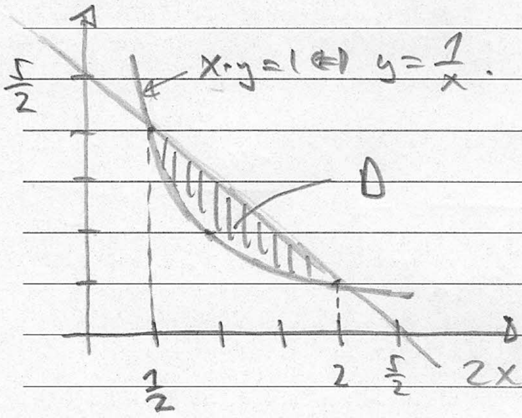
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{(-\infty)^2}{(0^+)^2} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sup f = +\infty.$

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare la regione D del primo quadrante delimitata dalla retta $2x + 2y = 5$ e dall'iperbole $xy = 1$ e calcolare $\iint_D xy \, dx \, dy$.

Risoluzione



Pti. di intersezione:

$\frac{1}{x} = -x + 5/2 \iff x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$\iff x = \frac{1}{2}, \; x = 2$

D è y-semplice:

$D = \left\{ (x,y) \mid x \in [\frac{1}{2}, 2], \; \frac{1}{x} \leq y \leq -x + \frac{5}{2} \right\}$

$\Rightarrow$ (Fubini-Tonelli)

$$\iint_D x \cdot y \, dx \, dy = \int_{1/2}^{2} \int_{1/x}^{-x+5/2} x \cdot y \, dy \, dx = \int_{1/2}^{2} \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1/x}^{y=-x+5/2} \right) dx$$

$$= \int_{1/2}^{2} \frac{x}{2} \cdot \left((-x+5/2)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right) dx = \int_{1/2}^{2} \frac{x}{2} \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_{1/2}^{2} \frac{x^3}{2} - \frac{5x^2}{2} + \frac{25x}{8} - \frac{1}{2x} \, dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{5x^3}{6} + \frac{25x^2}{16} - \frac{1}{2} \ln|x| \right]_{1/2}^{2}$$

$$= \frac{2^4}{8} - \frac{5 \cdot 2^3}{6} + \frac{25 \cdot 2^2}{16} - \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{(1/2)^4}{8} + \frac{5 \cdot (1/2)^3}{6} - \frac{25 \cdot (1/2)^2}{16} \underbrace{+ \frac{1}{2} \ln|\tfrac{1}{2}|}_{= -\frac{1}{2} \ln(2)}$$

$$= \ldots = \frac{165}{128} - \ln(2).$$