Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **24.2.10**

Cognome: ..... **Nome:** .....

Matricola: ..... **Corso di Laurea:** ..... **Canale:** A B C E-A 08/09

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione per un insieme D e descrivere i punti di accumulazione dell'insieme $[2, 7)$.

(ii) Dare la definizione di $\lim_{x \to 7} f(x) = 2$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x)$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in D$, allora f è costante in D?

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^1(a,b)$ tale che f é strettamente monotona e siano $m := \inf_{(a,b)} f$, $M := \sup_{(a,b)} f$. Allora

- [a] $f : (a,b) \to (m,M)$ é invertibile
- [b] $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$
- [c] se esiste $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$, allora $f(a) = f(b)$
- [d] $f : (a,b) \to [m,M]$ é biettiva

Risoluzione

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $a_n = (-1)^n \cdot (\pi^{-n} - 1)$. Allora

- [a] $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
- [b] $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n + 1| < \epsilon$ per ogni $n > n_0$
- [c] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- [d] $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_0} + 1| < \epsilon$

Risoluzione

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x}$ é integrabile in senso improprio su $(0,1)$

- [a] per $\alpha > 1$
- [b] per $\alpha > 0$
- [c] $\alpha > 2$
- [d] per nessun α

Risoluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\cdot\big(\cos(x) - 1\big)^2}{\sin(x^3)\cdot \ln^2(1-2x)}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare sup e inf di $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$ in $(0, +\infty)$.

Risoluzione

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare la regione D del primo quadrante delimitata dalla retta $2x + 2y = 5$ e dall'iperbole $xy = 1$ e calcolare $\iint_D xy \, dx \, dy$.

Risoluzione