## Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema del gradiente.

**Risposta**

(i) Se per $v \in \mathbb{R}^2$ (con $v = (v_1, v_2)$) con $\|v\| = 1$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste finito

$$D_v f(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

allora $D_v f(x_0, y_0)$ si chiama derivata direzionale di $f$ in $(x_0, y_0)$ nella direzione $v$.

(ii) Se $(x_0, y_0)$ è un punto interno del dominio di $(x_0, y_0)$ e $f$ è differenziabile in un intorno circolare di $(x_0, y_0)$ allora

$$D_v f(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \bullet v = f_x(x_0, y_0) \cdot v_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot v_2$$

(prodotto scalare)

## Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema di derivabilità della funzione inversa.

(ii) Calcolare $(f^{-1})'(y)$ per $y = -1$ ove $f(x) = 2x^3 + x - 1$.

**Risposta**

(i) Se $f : (a, b) \to (c, d)$ è continua, biettiva e derivabile in $x_0 \in (a, b)$, con $f'(x_0) \neq 0$, allora $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ è derivabile in $y_0 := f(x_0)$ con

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(ii) Abbiamo $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre vale $y = -1 = f(0)$ e quindi

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

## Esercizio 1 

[3 punti]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Allora quale delle seguenti affermazioni é *falsa*

- [a] se $A$ é limitato, $f(A)$ é limitato
- [b] se $A$ é un intervallo chiuso e limitato, $f(A)$ é un intervallo chiuso e limitato
- [$\boxtimes$] se $A$ é un intervallo aperto, $f(A) = (\inf_A f, \sup_A f)$
- [d] $f(A) \subseteq [\inf_A f, \sup_A f]$ .

**Risoluzione**

Per esempio $f(x) = 1$ $\forall x \in A$ è continua con $\inf f = \sup f = 1$ ma $f(A) = \{1\} \neq (1,1) = \emptyset$. (OSS: a) è vera per Weierstraß, b) è vera per il teorema dei valori intermedi e Weierstraß, d) è vera per ogni funzione.)

## Esercizio 2 

[3 punti]

Sia $a_n \sim c_n$ per $n \to \infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$. Allora per $n \to +\infty$

[a] $a_n + b_n \sim a_n + 1$  [$\boxtimes$] $\frac{a_n}{c_n} \sim b_n^2$  [c] $\lim_{n\to+\infty} (b_n)^{a_n} = 1$  [d] $a_n^{b_n c_n} \sim a_n^{b_n}$

**Risoluzione**

$a_n \sim b_n \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 1 \Rightarrow$

$$\frac{\frac{a_n}{b_n} \to 1}{b_n^2 \to 1^2 = 1} \to 1 \quad \text{per } n \to +\infty \Rightarrow b)$$

## Esercizio 3 

[3 punti]

Dato $E = \{\frac{n+2}{n^2+1} : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, allora

$a_n$ =

[a] $\inf E = 0$, $\sup E = +\infty$  [b] $\inf E = 0$, $\max E = \frac{1}{2}$

[c] $\inf E = -\infty$, $\sup E = \frac{1}{2}$  [$\boxtimes$] $\inf E = 0$, $\sup E = 2$

**Risoluzione**

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+2}{n^2+1} - \frac{n+3}{n^2+2n+2} = \frac{n^2+5n+1}{(n^2+1)\cdot(n^2+2n+2)} > 0 \quad \forall n = 0,1,2,\ldots$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente $\Rightarrow \sup E = a_0 = 2$ ($= \max E$)

$\inf E = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

($\min E$ non esiste).

## Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\frac{7}{12} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+2\cos(x)-3}{x^2\cdot\sin(x^2)} =: h(x)$$

$x^2\cdot\sin(x^2) \sim x^2\cdot x^2 = x^4$

## Risoluzione

Dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 4° ordine:

$\bullet\ e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \Rightarrow e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

$\bullet\ 2\cos(x) = 2\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) = 2-x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$

$\Rightarrow e^{x^2}+2\cos(x)-3 = \cancel{1}+\cancel{x^2}+\frac{x^4}{2}+\cancel{2}-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{12}\cancel{-3}+o(x^4)$

$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)x^4+o(x^4) = \frac{7}{12}x^4+o(x^4)$

$\sim \frac{7}{12}x^4 \Rightarrow h(x) \sim \frac{7/12\, x^4}{x^4} = 7/12$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 7/12$

## Esercizio 5

[4 punti]

Provare attraverso il principio di induzione che $n^2 > 2n+1$ per ogni $n \geq 3$.

## Risoluzione

Base: $3^2 > 2\cdot 3+1 \Leftrightarrow 9 > 7$ vera

Passo induttivo: Supponiamo che per $n$ vale

$n^2 > 2n+1$, sotto questa ipotesi è da dimostrare

$(n+1)^2 \overset{!}{>} 2(n+1)+1 \Leftrightarrow n^2+2n+1 \overset{!}{>} 2n+3$.

Allora $n^2 > 2n+1 \Rightarrow n^2+2n+1 > 2n+1+2n+1 =$

$2n+\underbrace{(2+2n)}_{>3\ \forall n\geq 3} > 2n+3$ ✓

Quindi la disuguaglianza vale per il principio di induzione

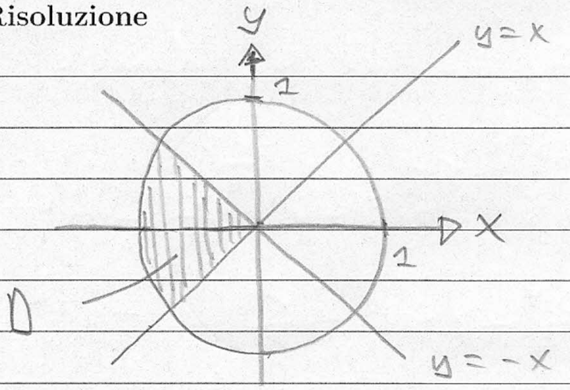
$\forall n \geq 3$.

## Esercizio 6

**[5 punti]**

Disegnare il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\, x \leq y \leq -x\}$ e calcolare $\iint_D x \, dx \, dy$. $=: I$

**Risoluzione**




D espresso in coordinate polari diventa

$$D' = \{(\rho, \vartheta) \mid 0 \leq \rho \leq 1,\ \frac{3}{4}\pi \leq \vartheta \leq \frac{5}{4}\pi\}$$
$$= [0,1] \times [3/4\pi, 5/4\pi].$$

Quindi otteniamo $I = \int_0^1 \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \rho \cdot \cos(\vartheta) \cdot \rho \cdot d\vartheta \, d\rho$

$$= \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \cdot \int_{3/4\pi}^{5/4\pi} \cos(\vartheta) \, d\vartheta$$

$$= \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) \cdot \left( \sin(\vartheta) \Big|_{3/4\pi}^{5/4\pi} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$