Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore **24.2.10**

Cognome:..... **Nome:** .....

Matricola: ..... **Corso di Laurea:** ..... **Canale:** A B C E-A 08/09

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema del gradiente.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema di derivabilità della funzione inversa.

(ii) Calcolare $(f^{-1})'(y)$ per $y = -1$ ove $f(x) = 2x^3 + x - 1$.

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Allora quale delle seguenti affermazioni é *falsa*

- [a] se A é limitato, $f(A)$ é limitato
- [b] se A é un intervallo chiuso e limitato, $f(A)$ é un intervallo chiuso e limitato
- [c] se A é un intervallo aperto, $f(A) = (\inf_A f, \sup_A f)$
- [d] $f(A) \subseteq [\inf_A f, \sup_A f]$.

Risoluzione

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $a_n \sim c_n$ per $n \to \infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$. Allora per $n \to +\infty$

[a] $a_n + b_n \sim a_n + 1$ [b] $\dfrac{a_n}{c_n} \sim b_n^2$ [c] $\lim_{n\to+\infty} (b_n)^{a_n} = 1$ [d] $a_n^{b_n c_n} \sim a_n^{b_n}$

Risoluzione

Esercizio 3

[3 punti]

Dato $E = \left\{ \frac{n+2}{n^2+1} : n = 0, 1, 2, 3, \ldots \right\}$, allora

- [a] $\inf E = 0$, $\sup E = +\infty$
- [b] $\inf E = 0$, $\max E = \dfrac{1}{2}$
- [c] $\inf E = -\infty$, $\sup E = \dfrac{1}{2}$
- [d] $\inf E = 0$, $\sup E = 2$

Risoluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos(x) - 3}{x^2 \cdot \sin(x^2)}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Provare attraverso il principio di induzione che $n^2 > 2n + 1$ per ogni $n \geq 3$.

Risoluzione

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq y \leq -x\right\}$ e calcolare $\iint_D x\, dx\, dy$.

Risoluzione