Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 24.1.12

Firma: ....

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale: [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dare la definizione del limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(ii) Dire se esiste una funzione continua e limitata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (Giustificare la risposta.)

Risposta

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.

Oppure: Se $\forall \varepsilon>0$ esiste $M \geq 0$ t.c. $|f(x)-0| = |f(x)| < \varepsilon$ $\forall x > M$.

(ii) Sì, per esempio $f(x) = \sin(x)$ è continua e limitata però $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ non esiste.

Domanda 2

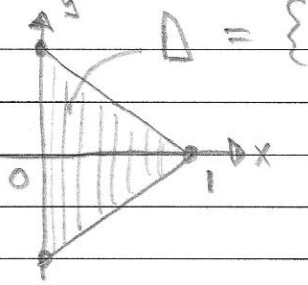
[3 punti]

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo con i vertici $(0,1)$, $(0,-1)$ e $(1,0)$. Allora l'integrale doppio $\iint_D \cos(x^2)\cdot y \, dx\, dy$

[a] è < 0 [b] è > 0 [c] ✗ è $= 0$ [d] non si può calcolare

(Giustificare la risposta.)

Risposta



$$D = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ \overbrace{x-1}^{-(1-x)} \leq y \leq 1-x \}.$$

Per Fubini-Tonelli vale

$$\iint_D \cos(x^2)\, y \, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \cos(x^2)\cdot y \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \cos(x^2) \cdot \int_{-(1-x)}^{1-x} y\, dy \, dx = 0$$

$\int_{-(1-x)}^{1-x} y\,dy = 0$ ($f(y) = y$ è dispari $\Rightarrow \int_{-a}^{a} y\, dy = 0$)

N.B: Si può anche ragionare solo per simmetria, cfr. compito 1-B

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare il comportamento della successione $\left(\sqrt[n]{\pi^n - \sin\left(n^2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ per $n \to +\infty$.

Risoluzione

$\sin(x) \in [-1,1]\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\pi^n - 1 \leq \pi^n - \sin(n^2 \cdot \frac{\pi}{2}) \leq \pi^n + 1 \Rightarrow$

(usando che $\sqrt[n]{\cdot}$ è crescente)

$\sqrt[n]{\pi^n - 1} \leq \sqrt[n]{\pi^n - \sin(n^2 \cdot \frac{\pi}{2})} \leq \sqrt[n]{\pi^n + 1}$

$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\pi \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{1}{\pi^n}} \to \pi \ (n \to +\infty) \qquad \pi \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{1}{\pi^n}} \to \pi \ (n \to +\infty)$

N.B: Si può anche ragionare come nel compito 1-B.

Quindi per il teor. dei carabinieri segue $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi^n - \sin(n^2 \cdot \pi/2)} = \pi$.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)}{x \cdot \ln(1-2x)} = -\frac{1}{4}$$

Risoluzione

- $\ln(1-2x) \sim -2x$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$x \cdot \ln(1-2x) \sim x \cdot (-2x) = -2x^2$ per $x \to 0$

- $\sin(t) \sim t$ per $t \to 0$. Visto che $\sqrt{x^2-1} - 1 =: t \to 0$

per $x \to 0$ segue $\sin(\sqrt{x^2+1} - 1) \sim \sqrt{x^2+1} - 1 \ (x \to 0)$

- $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) \ (t \to 0) \Rightarrow$ (con $t = x^2$)

$\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.

Quindi risulta

$\frac{\sin(\sqrt{x^2+1} - 1)}{x \cdot \ln(1-2x)} \sim \frac{x^2/2}{-2x^2} = -1/4 =$ limite

Esercizio 3

[3 punti]

Calcolare, se esiste, il gradiente della funzione $f(x,y) = \begin{cases} e^x - e^{2y} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ nel punto $(0,0)$.

Risoluzione

Per calcolare $\nabla f(0,0)$ si deve utilizzare la definizione di $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underbrace{h}_{\neq 0 = x}, \underbrace{0}_{y}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - \underbrace{e^0}_{=1} - 0}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underbrace{0}_{x}, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{0-0}{h}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (1, 0).$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\ln(3)} \underbrace{e^{2x}}_{= \underbrace{e^x}_{= 2-t} \cdot e^x} \cdot \arctan(\underbrace{2 - e^x}_{= t}) \, \underbrace{e^x dx}_{= -dt}$$

Risoluzione

Sost: $2 - e^x =: t \Rightarrow$

- $\frac{dt}{dx} = -e^x \Rightarrow e^x dx = -dt$
- $x = 0 \Rightarrow t = 2 - e^0 = 1$
  $x = \ln(3) \Rightarrow t = 2 - e^{\ln(3)} = -1$
- $e^x = 2 - t$

$$I = -\int_1^{-1} (2-t) \cdot \arctan(t) \, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} 2 \cdot \underbrace{\arctan(t)}_{\text{dispari}} dt}_{0 =} - \int_{-1}^{1} \underbrace{t}_{f'} \cdot \underbrace{\arctan(t)}_{g} \, dt$$

$$= - \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{f} \cdot \underbrace{\arctan(t)}_{g} \Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\arctan(1)}_{= \pi/4} - \underbrace{\arctan(-1)}_{= -\frac{\pi}{4}}\Big) + \frac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{\int_{-1}^{1} 1 \, dt}_{= 2} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt\Big)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{2}\Big(\pi/4 - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 5 [6 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{|x-3|} + \frac{x}{2}$ (senza calcolare f'') e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Inoltre la funzione è continua.
- Simmetrie: NO
- Intersezione con gli assi:

$x = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{|0-3|} + 0/2 = \sqrt{3}$.

Zeri:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} + x/2 & \text{se } x \geq 3, \\ \sqrt{3-x} + x/2 & \text{se } x < 3. \end{cases}$$

Allora, se $x \geq 3$: $f(x) = \underbrace{\sqrt{x-3}}_{\geq 0} + \underbrace{x/2}_{\geq 0} > 0$.

se $x < 3$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = \frac{-x}{2} \Rightarrow 3 - x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$
$x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} -6 \\ 2 \notin (-\infty, 3) \end{cases}$

Visto che $f(-6) = 0$, $x = -6$ è l'unico zero di f.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \left(\underbrace{\frac{\sqrt{x-3}}{x}}_{\to 0} + \frac{1}{2} \right) = -\infty \left(\frac{1}{2} \right) = -\infty$
- Segno di f: dal punto precedente e dal teorema degli zeri segue:
  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -6$.
- Asintoti: non ci sono asintoti.
- Studio di f':

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x-3}+1}{2\sqrt{x-3}} \; (> 0) & \text{se } x > 3 \\ -\frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3-x}-1}{2\sqrt{3-x}} & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

f non è derivabile in $x = 3$.

Punti critici: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Inoltre $f'(x)$ cambia segno in $x = 2$ da "+" a "−"
$\Rightarrow x = 2$ è un pto. di max. locale
$f(2) = 2$