Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **24.1.12**

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola:................ **Corso di Laurea:**........................ **Canale:** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dare la definizione del limite $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(ii) Dire se esiste una funzione limitata e monotona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$. (Giustificare la risposta.)

Risposta

(i) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.

Oppure: $\forall M > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > M\ \forall x \in \mathbb{R}$ con $0 \neq |x-0| = |x| < \delta$

(ii) Sì, esiste. P.e. $f(x) := \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ +1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è limitata e crescente ma $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

Domanda 2

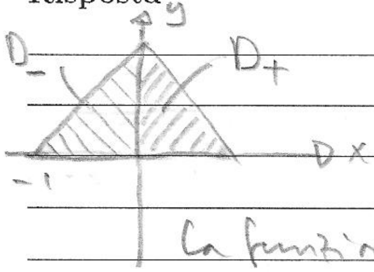
[3 punti]

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo con i vertici $(-1, 0)$, $\overset{(1,0)}{\cancel{(0, 1)}}$ e $(0, 1)$. Allora l'integrale doppio $\iint_D \underbrace{\sin(x^3)\cdot y}_{= f(x,y)}\,dx\,dy$

$\boxed{a}$ è > 0 $\boxed{b}$ è $= 0$ $\cancel{\boxed{c}}$ è < 0 $\boxed{d}$ non si può calcolare

(Giustificare la risposta.)

Risposta



Il dominio $D = D_- \cup D_+$ è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre la funzione integranda è dispari in x $\Rightarrow$

$\iint_{D_-} f(x,y)\,dx\,dy = -\iint_{D_+} f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$ (usando $|D_- \cap D_+| = 0$)

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_-} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_+} f(x,y)\,dx\,dy = 0$

N.B.: Si può anche ragionare usando Fubini-Tonelli, cfr. compito 1-A.

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare il comportamento della successione $\left(\sqrt[n]{e^n + \cos(n^2 \cdot \pi)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ per $n \to +\infty$.

Risoluzione

$$\sqrt[n]{e^n + \cos(n^2 \cdot \pi)} = e \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{\cos(n^2 \cdot \pi)}{e^n}} \xrightarrow{(n \to +\infty)} e \cdot 1 = e.$$

$\frac{\cos(n^2\cdot\pi)}{e^n} \to 0$ poiché $|\cos(n^2 \cdot \pi)| \leq 1$

Quindi la successione converge a $l = e$.

<u>N.B:</u> Si può anche ragionare con il teorema dei carabinieri, cfr. capitolo 1-A.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \ln(1+3x)}{\sin\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)} = 6$$

Risoluzione

- $\sin(t) \sim t$ per $t \to 0$. Visto che $1-\sqrt{1-x^2} =: t \to 0$ per $x \to 0$ ciò implica che $\sin(1-\sqrt{1-x^2}) \sim 1-\sqrt{1-x^2}$ per $x \to 0$.
- $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) \overset{t = -x^2}{\Rightarrow} 1-\sqrt{1-x^2} = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.
- $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0 \Rightarrow \ln(1+3x) \sim 3x$ per $x \to 0 \Rightarrow x \cdot \ln(1+3x) \sim 3x^2$ per $x \to 0$.

Quindi

$$\frac{x \cdot \ln(1+3x)}{\sin(1-\sqrt{1-x^2})} \sim \frac{3x^2}{x^2/2} = 6 \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ il limite converge a $l = 6$

Esercizio 3

[3 punti]

Calcolare, se esiste, il gradiente della funzione $f(x,y) = \begin{cases} e^{3x} - e^{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ nel punto $(0,0)$.

Risoluzione

Per il calcolo di $\nabla f(0,0)$ si deve utilizzare la definizione di f_x e f_y:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,\overset{\Rightarrow y}{0}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \overbrace{\frac{0-0}{h}}^{=0} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overset{x}{0},\overset{y\neq 0}{h}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{3\cdot 0} - e^{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{e^{h}-1}{h} = -1$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,-1)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\ln(9)} \underbrace{e^{x}}_{\overset{2-t}{e^{\frac{x}{2}}}\cdot e^{\frac{x}{2}}} \cdot \arctan\left(2 - e^{\frac{x}{2}}\right) dx \qquad e^{\frac{x}{2}}\,dx = -2\,dt$$

Risoluzione

$$I = -2 \cdot \int_1^{-1} (2-t)\cdot \arctan(t)\, dt$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} (2-t)\arctan(t)\, dt}_{=\,1-\frac{\pi}{2}}$$

$1-\frac{\pi}{2}$, cfr. compito 1-A

Sost: $2 - e^{\frac{x}{2}} =: t \Rightarrow$

- $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2}e^{x/2} \Rightarrow e^{\frac{x}{2}}dx = -2dt$
- $x = 0 \Rightarrow t = 2 - e^{0/2} = 1$
- $x = \ln(9) \Rightarrow t = 2 - e^{\frac{\ln(9)}{2}} = 2 - \left(e^{\ln(9)}\right)^{1/2} = 2 - 3 = -1$
- $e^{x/2} = 2 - t$

$$= 2\cdot\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{2 - \pi}}$$

Esercizio 5

[6 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{|x-2|} - x$ (senza calcolare f'') e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Si procede come nel compito 1-A. Così risulta:

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$
- Simmetrie: No
- $f(0) = \sqrt{2}$, $f(x) = 0 \iff x = 1$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp \infty$
- $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{2\sqrt{2-x}-1}{2\sqrt{2-x}}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$
- $f'(x) = 0 \iff x = 9/4$ e $9/4$ è un pto di max. locale
- $f(9/4) = -7/4$