Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore 24.1.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Dare la definizione del limite $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ per $l \in \mathbb{R}$.

(ii) Dire se esiste una successione limitata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per cui non esiste $\lim_{n\to+\infty} x_n$. (Giustificare la risposta.)

Risposta

(i) $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$|l - x_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

(ii) Sì, p.e. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata ma non

ammette limite.

Domanda 2

[3 punti]

Sia $F(x) = e^{x^2} - 1$ una primitiva di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora

- a $f(x) = 2x\,e^{x^2} + c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$
- b $f(x) = \int_0^x F(t)\,dt$
- c non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$
- ☒ d $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Risposta

Sia $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Allora per il teorema fondamentale

del calcolo integrale, G è derivabile con $G' = f$. Inoltre

per ipotesi $F' = f \Rightarrow (F - G)' = f - f = 0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ con

$F = G + c$. Però $F(0) = e^{0^2} - 1 = 1 - 1 = 0$

$G(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow F(x) = G(x)$.

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n+\sqrt[4]{n^9+3}} =: a_n$

Risoluzione

- $\sqrt{n+3} \sim \sqrt{n}$ poichè $\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+3}{n}} = \sqrt{1+\frac{3}{n}} \to 1$ per $n \to +\infty$
- $n + \sqrt[4]{n^9+3} \sim \sqrt[4]{n^9}$ poichè

$$\frac{n+\sqrt[4]{n^9+3}}{\sqrt[4]{n^9}} = \frac{n}{n^{9/4}} + \sqrt[4]{\frac{n^9+3}{n^9}} = n^{\overbrace{1-9/4}^{<0}} + \sqrt[4]{1+\frac{3}{n^9}}$$

$$\to 0 + 1 = 1 \text{ per } n \to +\infty$$

Quindi $a_n \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^9}} = \frac{n^{1/2}}{n^{9/4}} = \frac{1}{n^{9/4-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{7/4}}$, $7/4 = \alpha > 1$

Visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{\sqrt[4]{x^5} \cdot (\cos 3x - 1)} = -\infty$$

Risoluzione

- $x - \sin(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$ per $x \to 0$
- $\cos(3x) - 1 = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) - 1 = -\frac{9}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$

$\sim -\frac{9}{2} x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x^5} \cdot (\cos(3x) - 1) \sim x^{5/4} \cdot \left(-\frac{9}{2} x^2\right) = -\frac{9}{2} x^{13/4}$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \frac{x - \sin(x)}{\sqrt[4]{x^5} \cdot (\cos(3x) - 1)} \sim \frac{x^3/6}{-\frac{9}{2} x^{13/4}} = -\frac{2}{9 \cdot 6} \cdot x^{-1/4}$$

$\to -\infty$ per $x \to 0^+$

$\Rightarrow$ il limite diverge a $-\infty$.

Esercizio 3

[4 punti]

Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stabilire se è continua ed esiste f_x nel punto $(0,0)$.

Risoluzione

- Per $y=0$ segue $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$ = candidato limite.

Passando alle coordinate polari segue:

$$|f(x,y)-0| \overset{\downarrow}{=} \left| \frac{\rho^2\cdot\cos^2(\vartheta) - \rho^2\cdot\sin^2(\vartheta)}{\rho} \right| = \rho\cdot\left|\overbrace{\cos^2(\vartheta)}^{\le 1} - \overbrace{\sin^2(\vartheta)}^{\le 1}\right|$$

$$\le 2\cdot\rho \to 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ è continua in } (0,0).$$

- $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$

N.B.: $\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{|h|} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} \text{ non } \exists \Rightarrow$$

f non è derivabile parzialmente in (0,0) rispetto ad x.

Esercizio 4

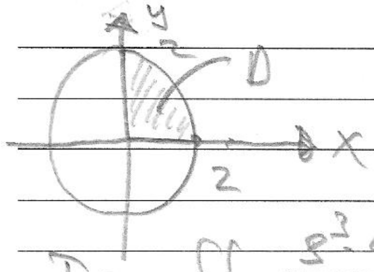
[4 punti]

Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy =: I$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Risoluzione



D corrisponde a $D' = \overset{\rho}{[0,2]} \times \overset{\vartheta}{[0,\tfrac{\pi}{2}]}$ in coord. polari. Quindi risulta:

$$I = \iint_{D'} \frac{\rho^3\cos^3(\vartheta)\cdot\rho\cdot\sin(\vartheta)}{(\rho^2)^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\vartheta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \rho\cdot\cos^3(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\rho =$$

$$= \int_0^2 \rho\, d\rho \cdot \left(-\int_0^{\pi/2} \underbrace{-\cos^3(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)}_{=\left(\frac{\cos^4(\vartheta)}{4}\right)'} d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 \cdot \left(-\frac{\cos^4(\vartheta)}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{2^2}{2}\cdot\left(\frac{\overbrace{\cos^4(0)}^{=1} - \overbrace{\cos^4(\frac{\pi}{2})}^{=0}}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5 [5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{-e^{2x}}{\sqrt{x^2-3}}$ (senza calcolare f'') e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio: $x \in D(f) \Leftrightarrow x^2-3>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$

• Simmetrie: NO

• Intersezione con gli assi: $0 \notin D(f) \Leftrightarrow |x| > \sqrt{3}$

$f(x) = \dfrac{-\overbrace{e^{2x}}^{>0\ \forall x}}{\underbrace{\sqrt{x^2-3}}_{>0\ \forall x}} \Rightarrow f(x) < 0 \ \forall x \in D(f)$ quindi $f(x)$ non ha zeri.

• Limiti: Per $x \to \pm\infty$ vale $\sqrt{x^2-3} \sim |x| = \sqrt{x^2}$ poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{|x|} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^2-3}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{1-3/x^2} = 1$$

$\Rightarrow$ • $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{2x}}{\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{2x}}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^{2x}}{1} = -\infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{2x}}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{0}{+\infty} = 0 \Rightarrow y=0$ è un asintoto orizzontale per $x\to-\infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{-e^{2x}}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{-e^{\sqrt{3}}}{0^+} = -\infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{-e^{2x}}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{-e^{-\sqrt{3}}}{0^+} = -\infty.$

$x = \pm\sqrt{3}$ sono asintoti verticali

• Studio di f':

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}\cdot(-2e^{2x}) + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}\cdot e^{2x}}{x^2-3} = \frac{e^{2x}(-2(x^2-3)+x)}{(x^2-3)^{3/2}} = \frac{\overbrace{e^{2x}}^{>0}(-2x^2+x+6)}{\underbrace{(x^2-3)^{3/2}}_{>0}}$$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|>\sqrt{3} \text{ e} \\ -2x^2+x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|>\sqrt{3} \text{ e} \\ x = \begin{smallmatrix} -3/2 \\ 2 \end{smallmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

$-3/2 \quad 2$

Inoltre, $f'(x)$ cambia in $x=2$ segno da "+" a "−"

$\Rightarrow x=2$ è un pto. di max. locale