Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore 24.1.12

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[1+2 punti]

(i) Dare la definizione del limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) Dire se esiste una successione monotona $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per cui non esiste $\lim_{n\to+\infty} x_n$. (Giustificare la risposta.)

Risposta

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$

Oppure: $\forall M\geq 0\ \exists K\geq 0$ t.c. $f(x)\geq M\ \forall x\geq K$.

(ii) No, una successione monotona non può essere irregolare. Infatti $\lim_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases}\sup\{x_n|n\in\mathbb{N}\} & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è crescente,}\\ \inf\{x_n|n\in\mathbb{N}\} & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è decrescente.}\end{cases}$

Domanda 2

[3 punti]

Sia $F(x) = e^{x^2} + 1$ una primitiva di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora

☒ a non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

☐ b $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

☐ c $f(x) = 2x\,e^{x^2} + c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$

☐ d $f(x) = \int_0^x F(t)\,dt$

Risposta

Sia $G(x) := \int_c^x f(t)\,dt$. Nonostante $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ (cioè $G'=f$) grazie al teorema fondamentale non $\exists\ c\in\mathbb{R}$ t.c. $F(x)=G(x)$ perché $G(c)=0$ mentre $F(c)=e^{c^2}+1\neq 0$ $\forall c\in\mathbb{R}$.

Esercizio 1

[3 punti]

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+\sqrt[7]{n^8+5}} =: a_n$

Risoluzione

Ragionando come nel capitolo 2-A segue

- $\sqrt[3]{n+3} \sim \sqrt[3]{n} = n^{1/3}$ per $n \to +\infty$
- $n + \sqrt[7]{n^8+5} \sim \sqrt[7]{n^8} = n^{8/7}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n \sim \frac{n^{1/3}}{n^{8/7}} = \frac{1}{n^{8/7-1/3}} = \frac{1}{n^{17/21}}$, $17/21 = \alpha \leq 1$

Visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $\alpha \leq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ anche diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{\sqrt[6]{x^7}\cdot(\cos 5x - 1)} = +\infty$$

Risoluzione

Ragionando come nel capitolo 2-A segue

- $\sin(x) - x \sim -\frac{x^3}{6}$ per $x \to 0$
- $\sqrt[6]{x^7}\cdot(\cos(5x)-1) \sim x^{7/6}\cdot\frac{-(5x)^2}{2} = -\frac{25}{2}x^{19/6}$

$\Rightarrow \frac{\sin(x)-x}{\sqrt[6]{x^7}\cdot(\cos(5x)-1)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{-\frac{25}{2}\cdot x^{19/6}} = \frac{25}{3}\cdot x^{-1/6}$

$\to \frac{25}{3}\cdot(+\infty) = +\infty$

per $x \to 0^+$.

Esercizio 3

[4 punti]

Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stabilire se è continua ed esiste f_y nel punto $(0,0)$.

f(x,y) in 2-A

Risoluzione

Ragionando come nel compito 2-A (usare $f(x,y) = -\frac{y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

segue: • f è continua in (0,0)

• f <u>non</u> è derivabile parzialmente rispetto a y in (0,0)

Esercizio 4

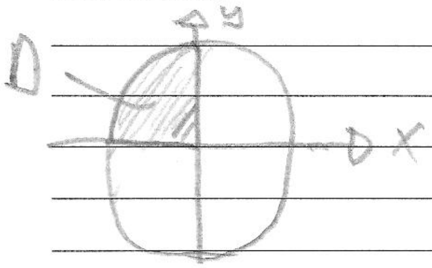
[4 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int\int_D \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy =: I$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \text{ tali che } x^2+y^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$.

Risoluzione



D corrisponde a $D' = [0,3] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$ in coord. polari. Quindi segue:

$$I = \iint_{D'} \frac{\rho \cdot \cos(\vartheta) \cdot \rho^3 \cdot \sin^3(\vartheta)}{(\rho^2)^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_0^3 \int_{\pi/2}^{\pi} \rho \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin^3(\vartheta) \, d\vartheta \, d\rho =$$

$$= \int_0^3 \rho \cdot d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \, d\vartheta$$

$$= \left(\frac{\sin^4(\vartheta)}{4}\right)'$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^3 \cdot \frac{\sin^4(\vartheta)}{4}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{9}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -9/8$$

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2-5}}$ (senza calcolare f'') e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Si procede come nel compito 2-A. Così risulta:

- Dominio: $x \in D(f) \iff x^2-5>0 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{5}) \cup (+\sqrt{5},+\infty)$
  $\iff |x| > \sqrt{5}$.
- Simmetrie: NO
- Intersezione con gli assi: • $0 \notin D(f)$
  • $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ non ha zeri.
- Limiti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{5}^{\pm}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $y=0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
$x = \pm\sqrt{5}$ sono asintoti verticali.

- $f'(x) = \dfrac{e^{-2x}(-2x^2-x+10)}{(x^2-5)^{3/2}} = 0 \iff x = -5/2$

e $x = -5/2$ è un pto di min. locale.

Grafico: