Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **24.1.19**

Firma: .....

Cognome ..... **Nome** ..... **A.A.** .....

Matricola ..... **Corso di Laurea** .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio della radice per una serie numerica.

(ii) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+2n}{3+4n}\right)^{5n}$.

Risposta

(i) Sia $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} =: q$ esiste.

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
- converge se $q<1$
- diverge a $+\infty$ se $q>1$
- non si può concludere nulla se $q=1$.

(ii) • $a_n := \left(\frac{1+2n}{3+4n}\right)^{5n} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

• $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1+2n}{3+4n}\right)^5 \to \left(\frac{2}{4}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = q < 1$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x|$ nel punto $x_0 = 0$.

Risposta

(i) f è derivabile in x_0 se converge il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

(ii) Allora, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x\cdot|x| - 0\cdot|0|}{x-0} = |x| \to 0$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0=0$ con derivata $f'(0)=0$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin(x)-\ln(1+x^2)}{x^4} =: \ell$$

Risoluzione

Si usa la formula di Taylor:

- denominatore di 4°-ordine $\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 4°-ordine.

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow x\cdot\sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \underbrace{x\cdot o(x^4)}_{\overset{\overset{o(x^5)=o(x^4)}{\parallel}}{}}$ per $x\to 0$

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t\to 0 \Rightarrow (t=x^2)$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ per $x\to 0$

Quindi $x\cdot\sin(x) - \ln(1+x^2) = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{3-1}{6}\cdot x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{3}\cdot x^4$ per $x\to 0$

$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^1 \sqrt{x}\cdot\ln(x)\,dx$$

Risoluzione

$$I = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{f'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot\ln(x)}_{f\cdot g}\Big|_a^1 - \int_a^1 \underbrace{\frac{2}{3}\cdot \overbrace{x^{3/2}}^{\overset{\overset{x^{\frac{1}{2}}}{\parallel}}{}}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx\right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{2}{3}\cdot\left(1^{3/2}\cdot\overbrace{\ln(1)}^{=0} - \underbrace{a^{3/2}\cdot\ln(a)}_{\to 0}\right) - \frac{2}{3}\cdot\lim_{a\to 0^+} \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_a^1$$

$$= 0 - \frac{4}{9}\cdot\lim_{a\to 0^+}\left(1^{3/2} - a^{3/2}\right) = -\frac{4}{9}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,2)$ per $f(x,y) = x \cdot y^2 + x^2 \cdot y$ e il versore $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

Risoluzione

- $D_v f(1,2) = f_x(1,2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - f_y(1,2) \cdot \frac{1}{2}$
- $f_x(x,y) = y^2 + 2xy \Rightarrow f_x(1,2) = 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{8}$
- $f_y(x,y) = 2xy + x^2 \Rightarrow f_y(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1^2 = \underline{5}$

$\Rightarrow D_v f(1,2) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{4 \cdot \sqrt{3} - \frac{5}{2}}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- Sia $m \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(mx^2)}{x^4 + m^4 \cdot x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(mx^2)}{(mx^2)^2 \cdot \frac{1+m^4}{m^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{1+m^4}$$

$\to \frac{1}{2}$

dipende da m

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> $\exists \Rightarrow f$ <u>non</u> è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow f$ <u>non</u> è differenziabile in $(0,0)$.

- $f(h,0) = f(0,h) = 0 \ \forall h \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} &= f_x(0,0) = 0 \\ \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} &= f_y(0,0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ è derivabile in } (0,0)$$

con $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) := e^{(x^3-3x)} - 1$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio tutto $\mathbb{R}$.

$x\cdot(x^2-3) = x^3\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})$

- Zeri: $f(x)=0 \iff e^{x^3-3x}=1 \iff \underbrace{x^3-3x}_{} = \ln(1) = 0$

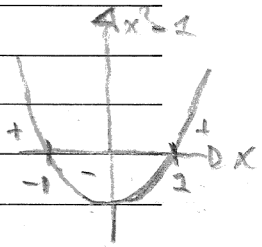
$\iff x=0$ opp. $x=\pm\sqrt{3}$.

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to\pm\infty} x^3-3x} - 1 = e^{\pm\infty} - 1 = \begin{cases} +\infty & \text{per } x\to+\infty \\ -1 & \text{per } x\to-\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ $y=-1$ è un asintoto orizzontale per $x\to-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui.

- $f'(x) = e^{x^3-3x}\cdot(3x^2-3) = \underbrace{3\cdot e^{x^3-3x}}_{>0 \text{ sempre}}\cdot(x^2-1)$



$\Rightarrow$ • $f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq -1 \text{ opp.} \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\iff$ f è crescente

• $f'(x) \leq 0 \iff x\in[-1,1] \iff$ f è decrescente

• $f'(x)=0 \iff x=\pm 1$. Inoltre $f'(x)$ cambia segno in

• $x_0 := +1$ da "−" a "+" $\Rightarrow$ $x_0=1$ è un pto di min. locale

• $x_1 := -1$ da "+" a "−" $\Rightarrow$ $x_1=-1$ è un pto. di max. locale.

Grafico: