Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la continuità in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^{-1} \cdot \sin(x^2) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Risposta

(i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$ segue che $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \to +\infty$.

(ii) Se $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora

$$f(x_n) \begin{cases} = 0 & \text{se } x_n = 0 \\ = \underbrace{\dfrac{\sin(x_n^2)}{x_n^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x_n}_{\to 0} \to 1 \cdot 0 = 0 & \text{se } x_n \neq 0. \end{cases}$$

per $n \to +\infty$

Quindi, in ogni caso $f(x_n) \to 0 = f(0)$ per $n \to +\infty$ e di conseguenza <u>f è continua in $x_0 = 0$.</u>

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Calcolare i punti di Lagrange della funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + \sin(x)$.

Risposta

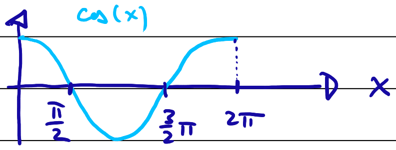
(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b), allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(ii) • $f \in C[0, 2\pi]$ è derivabile in $(0, 2\pi)$ con $f'(x) = 2 + \cos(x)$

• $f(2\pi) = 2\cdot 2\pi + \sin(2\pi) = 4\pi$, $f(0) = 0 + \sin(0) = 0$ $\Rightarrow$

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \overset{!}{=} f'(c) = 2 + \cos(c)$$



$\Leftrightarrow \cos(c) = 0$

$\Leftrightarrow$ <u>$c = \frac{\pi}{2}$</u> oppure <u>$c = \frac{3}{2}\pi$</u>

Esercizio 1 [5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(x) - \sin(x) - 2}{\sinh(x)\cdot\ln(1+x^2)} =: \ell$$

Risoluzione

- $\sinh(x) \sim x$ e $\ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$ $\overset{\text{P.d.S.}}{\Longrightarrow}$
  $\sinh(x)\cdot\ln(1+x^2) \sim x\cdot x^2 = x^3$ per $x\to 0$.

- Quindi il numeratore è da sviluppare fino al 3° ordine:
  $$e^x + \cos(x) - \sin(x) - 2 = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \left(\cancel{x} + \frac{x^3}{6}\right) \cancel{-2} + o(x^3)$$
  $$= 2\cdot\frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
  $$\sim \frac{x^3}{3} \text{ per } x \to 0$$

$\overset{\text{P.d.S.}}{\Longrightarrow}$ $$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}^{\,1}/3}{\cancel{x^3}_{\,1}} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2 [5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^{+\infty} (x-1)\cdot e^{-2x}\,dx$$

Risoluzione

- $$\int \underbrace{(x-1)}_{f}\cdot\underbrace{e^{-2x}}_{g'}\,dx = \underbrace{(x-1)}_{f}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\right)}_{g} + \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\left(+\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\right)}_{g}dx$$
  $$= -\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + c$$
  $$= \left(-\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\right)\cdot e^{-2x} + c$$
  $$= \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right)\cdot e^{-2x} + c$$

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b (x-1)\cdot e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot e^{-2x}\right]_0^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\Big[\underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{2}\right)\cdot e^{-2b}}_{\to 0 \text{ per } b\to+\infty} - \underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{2}\right)\cdot e^{-2\cdot 0}}_{=\frac{1}{4}}\Big] = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per $f(x,y) = \dfrac{x-2y}{1+x^2}$ e il versore $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Risoluzione

- $f_x(x,y) = \dfrac{(1+x^2)\cdot 1 - 2x\cdot(x-2y)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f_x$ è continua e

$f_x(2,1) = \dfrac{1+2^2 - 2\cdot 2(2-2\cdot 1)}{(1+2^2)^2} = \dfrac{5}{5^2} = \dfrac{1}{5}$

- $f_y(x,y) = \dfrac{-2}{1+x^2} \Rightarrow f_y$ è continua e

$f_y(2,1) = \dfrac{-2}{1+2^2} = -\dfrac{2}{5}$

Quindi per il teorema del gradiente segue

$D_v f(2,1) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} = \dfrac{3-8}{25} = \dfrac{-5}{25} = -\dfrac{1}{5}$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la derivabilità parziale in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = |y| \cdot \sqrt{x^2 + 2y^2}$$

Risoluzione

- $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

- $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|\cdot\sqrt{0^2+2h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{|h|\cdot|h|}^{=h^{\cancel{2}}\,1}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{h}\;1}$

$= \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\cdot h = 0$

Quindi f è derivabile parzialmente in $(0,0)$ con $\text{grad}\, f(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

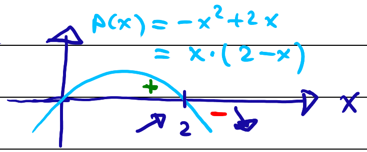
- **Dominio**: $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **Zeri**: $e^a > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$, quindi f non ammette zeri.
- **Asintoti**:
  - $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^0 = 1$, $\quad \frac{x-1}{x^2} \to 0$ per $x \to \pm\infty$

    $\Rightarrow y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.
  - $\displaystyle\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \lim_{x \to 0^\pm} e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$, $\quad x-1 \to -1$, $\quad x^2 \to 0^+$
- **Estremi locali**: Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici di f.
- **Studio della derivata**: $f'(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \dfrac{x^2 \cdot 1 - \overbrace{2x \cdot (x-1)}^{2x^2-2x}}{(x^2)^2}$

  $= \underbrace{e^{\frac{x-1}{x^2}}}_{>0} \cdot \dfrac{-x^2+2x}{\underbrace{x^4}_{>0}} = 0 \iff x = 2$, $\quad -x^2+2x =: p(x)$

  (N.B. $x = 0 \notin X$ non è una soluzione!)

Inoltre



f' cambia segno in $x = 2$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = 2$ è un punto di massimo locale.

Grafico: