Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **–B–** **24.1.23**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la continuità in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^{-1} \cdot (1 - \cos(x)) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Risposta

(i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$ segue che $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \to +\infty$.

(ii) Se $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora

$$f(x_n) \begin{cases} = 0 & \text{se } x_n = 0 \\ = \underbrace{\frac{1-\cos(x_n)}{x_n^2}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{x_n}_{\to 0} \to \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 & \text{se } x_n \neq 0. \end{cases}$$

per $n \to +\infty$

Quindi, in ogni caso $f(x_n) \to 0 = f(0)$ per $n \to +\infty$ e di conseguenza $\underline{\underline{f \text{ è continua in } x_0 = 0.}}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Calcolare i punti di Lagrange della funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + \sin(2x)$.

Risposta

(i)
- $f \in C[0, 2\pi]$ è derivabile in $(0, 2\pi)$ con $f'(x) = 1 + 2\cdot\cos(2x)$
- $f(2\pi) = 2\pi + \sin(2\cdot 2\pi) = 2\pi$, $f(0) = 0 + \sin(2\cdot 0) = 0$ $\Rightarrow$

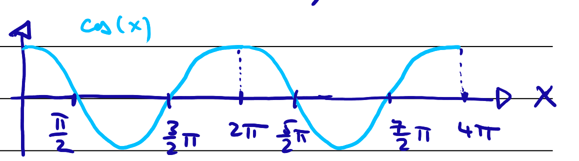
$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \overset{!}{=} f'(c) = 1 + 2\cos(2c)$$

(ii)

$\Leftrightarrow$ $\cos(2c) = 0$

$\Leftrightarrow$ $2c = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$ opp. $\frac{7}{2}\pi$

$\Leftrightarrow$ $c = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ opp. $\frac{7}{4}\pi$.



Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - e^x + \cosh(x)}{\sin(x^2)\cdot \ln(1+x)} =: \ell$$

Risoluzione

- $\sin(x^2) \sim x^2$ e $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

P.d.S.
$\Rightarrow \sin(x^2)\cdot \ln(1+x) \sim x^2 \cdot x = x^3$ per $x\to 0$ $\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine.

- $\sin(x) - e^x + \cosh(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6}\right) + \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)$
$= -2\cdot \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
$\sim -\frac{x^3}{3}$ per $x\to 0$

P.d.S.
$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}\cdot \cancel{x^3}\,1}{\cancel{x^3}\,1} = -\frac{1}{3}$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} (x+1)\cdot e^{-3x}\, dx$$

Risoluzione

- $\int \underset{f}{(x+1)} \cdot \underset{g'}{e^{-3x}}\, dx = \underset{f}{(x+1)} \cdot \underset{g}{\left(-\frac{1}{3}\cdot e^{-3x}\right)} + \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\left(+\frac{1}{3}\cdot e^{-3x}\right)} dx$
$= -\frac{1}{3}\cdot(x+1)\cdot e^{-3x} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + c$
$= \left(-\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{9}\right)\cdot e^{-3x} + c$
$= \left(-\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right)\cdot e^{-3x} + c$

$I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b (x+1)\cdot e^{-3x} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{9}\right)\cdot e^{-3x}\right]_0^b$

$= \lim_{b\to+\infty} \left[\underbrace{-\left(\frac{b}{3}+\frac{4}{9}\right)\cdot e^{-3b}}_{\to 0 \text{ per } b\to+\infty} + \underbrace{\left(\frac{0}{3}+\frac{4}{9}\right)\cdot e^{-3\cdot 0}}_{=4/9}\right] = 4/9$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{y^2+1}$ e il versore $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Risoluzione

- $f_x(x,y) = \dfrac{2}{y^2+1} \Rightarrow f_x$ è continua e

$$f_x(2,1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$$

- $f_y(x,y) = \dfrac{(y^2+1)\cdot(-1) - 2y\cdot(2x-y)}{(y^2+1)^2} \Rightarrow f_y$ è continua e

$$f_y(2,1) = \frac{(1^2+1)^2\cdot(-1) - 2\cdot 1(2\cdot 2-1)}{(1^2+1)^2} = \frac{-2-2\cdot 3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Quindi per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(2,1) = 1\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{11}{5}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la derivabilità parziale in $(x_0,y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = |x| \cdot \sqrt{2x^2+y^2}$$

Risoluzione

- $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|\cdot\sqrt{2h^2+0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{|h|\cdot|h|}^{=h^{\cancel{2}\,1}}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{h}\ 1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\cdot h = 0$$

- $$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Quindi f è derivabile parzialmente in $(0,0)$ con $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Zeri: $e^a > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$, quindi f non ammette zeri.
- Asintoti: • $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1-x}{x^2}} = e^0 = 1$ $\frac{1-x}{x^2} \to 0$ per $x \to \pm\infty$

  $\Rightarrow$ $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

  • $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} e^{\frac{\overset{\to 1}{1-x}}{\underset{\to 0^+}{x^2}}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

  $\Rightarrow$ $x = 0$ è asintoto verticale.

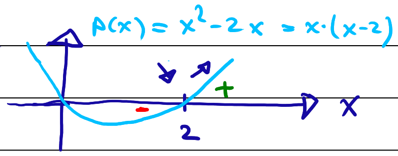
- Estremi locali: Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici di f.

- Studio della derivata: $f'(x) = e^{\frac{1-x}{x^2}} \cdot \dfrac{x^2\cdot(-1)\overbrace{-2x\cdot(1-x)}^{-2x^2+2x}}{(x^2)^2}$

  $= \underbrace{e^{\frac{1-x}{x^2}}}_{>0} \cdot \dfrac{\overbrace{x^2-2x}^{=:p(x)}}{\underbrace{x^4}_{>0}} = 0 \iff x = 2$

  (← N.B. $x = 0 \notin X$ non è una soluzione!)

Inoltre



f' cambia segno in $x = 2$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ $x = 2$ è un punto di minimo locale.