Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 25.1.11

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di una funzione f tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Risposta

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \overset{def}{\iff} \forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X (=\mathbb{R})$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. (Oppure: $\forall \varepsilon > 0\ \exists L > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon\ \forall x \in X,\ x > L$

dominio di f

(ii) $f(x) = 2 + e^{-x}$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema del gradiente per il calcolo della derivata direzionale.

(ii) Calcolare la derivata direzionale $D_v f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ per $f(x, y) = \cos(x \cdot y)$ e $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Risposta

(i) Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un pto interno di X e f differenziabile in x_0. Allora $\forall$ versore $v \in \mathbb{R}^N$ la derivata direzionale $D_v f(x_0)$ esiste e

$$D_v f(x_0) = \text{grad} f(x_0) \cdot v = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \cdot v_k .$$

(ii) $f_x(x, y) = -y \sin(x \cdot y)$, $f_y(x, y) = -x \cdot \sin(xy)$

$\Rightarrow \text{grad} f(x_0, y_0) = \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), -1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$

$\Rightarrow D_v f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$= -\frac{\pi \cdot \sqrt{3} + 2}{4}$$

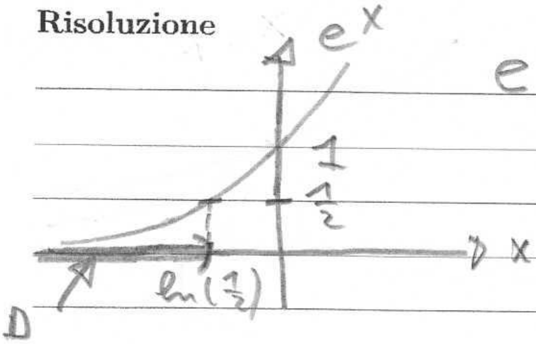
Esercizio 1

[3 punti]

L'estremo superiore di $D = \left\{x \in \mathbb{R} : e^x < \frac{1}{2}\right\}$ è

[a] un numero positivo   [b] 0 ~~[c]~~ $-\ln(2)$ [d] non esiste

Risoluzione



$e^x < \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) < \ln(\frac{1}{2})$

ln è strett. crescente

$\quad x = \ln(e^x)$, $\quad \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$

cioè $D = (-\infty, -\ln(2))$

$\Rightarrow \sup D = -\ln(2)$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = \sin(x) - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ è

[a] periodica   ~~[b]~~ decrescente   [c] tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste   [d] ha infiniti punti critici

Risoluzione

f è derivabile con $f'(x) = \cos(x) - 2$. Visto che $\cos(x) \in [-1,1]\ \forall x \in \mathbb{R}$ segue $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f è (strettamente) decrescente.

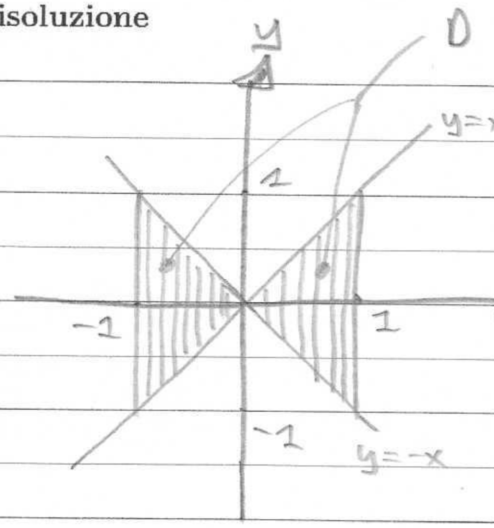
Esercizio 3

[3 punti]

Il dominio $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], -|x| \leq y \leq |x|\}$ è

[a] x ma non y-semplice   ~~[b]~~ y ma non x-semplice   [c] x e y-semplice   [d] non è semplice

Risoluzione



X è dato come dominio y-semplice ma non si può rappresentare come dominio x-semplice: non $\exists$ funzioni continue $h_{1,2} : [c,d] \to \mathbb{R}$ t.c.

$D = \{(x,y) \mid y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7\,n^n + 2\,n!}{5\,n^{11} + 3\,e^{n\ln(n)}} =: a_n$$

Risoluzione

$e^{n\cdot\ln(n)} = \left(e^{\ln(n)}\right)^n = n^n$. Inoltre vale

- $\frac{n!}{n^n} \to 0$ per $n \to +\infty$
- $\frac{n^\alpha}{n^n} \to 0$ —"— $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Quindi risulta:

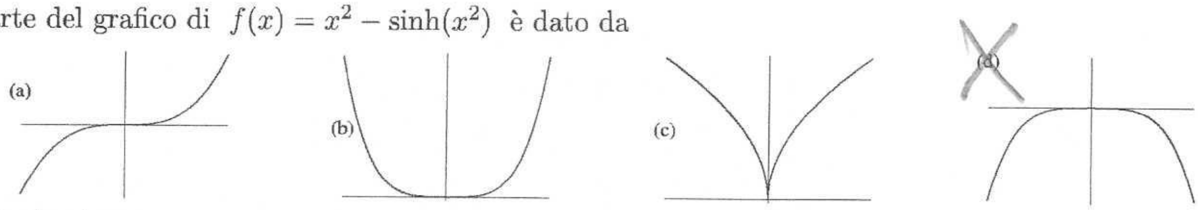
$$a_n = \frac{7n^n + 2n!}{5n^{11} + 3n^n} = \frac{\cancel{n^n}\cdot\left(7 + 2\cdot\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\to 0}\right)}{\cancel{n^n}\cdot\left(\underbrace{5\cdot\frac{n^{11}}{n^n}}_{\to 0} + 3\right)} \to \frac{7}{3}.$$

0 per $n \to +\infty$

Esercizio 5

[4 punti]

Parte del grafico di $f(x) = x^2 - \sinh(x^2)$ è dato da



Risoluzione

f è pari $\Rightarrow$ non a)

f è derivabile $\Rightarrow$ non c).

Inoltre

$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \geq x$ per $x \geq 0$

$\Rightarrow \sinh(x^2) \geq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - \sinh(x^2) \leq 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ d) è la risposta giusta

Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito
$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\, dx =: I$$

Risoluzione

Sost: $\sqrt{x} = t \iff x = t^2$

$\Rightarrow$ • $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t\,dt$

• $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi$.

Quindi risulta

$$I = \int_0^{\pi} \underbrace{2t}_{f} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{g'}\, dt = \underbrace{2t \cdot (-\cos(t))}_{f \cdot g}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{2 \cdot (-\cos(t))}_{f' \cdot g}\, dt$$

$$= 2\pi \cdot \underbrace{(-\cos(\pi))}_{-(-1)=1} - 0 + \sin(t)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 2\pi + 0 - 0 = 2\pi$$