Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **25.1.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di una funzione f tale che $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$. dominio di f

Risposta

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \overset{def}{\iff} \forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ $(=\mathbb{R})$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. (Oppure: $\forall M \geq 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M\ \forall x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$.

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema del gradiente per il calcolo della derivata direzionale.

(ii) Calcolare la derivata direzionale $D_v f(\pi, 1)$ per $f(x,y) = \sin(x\cdot y)$ e $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Risposta

(i) cfr. Compito 1-A

(ii) $f_x(x,y) = y\cdot\cos(xy)$, $f_y(x,y) = x\cdot\cos(xy)$

$\Rightarrow \text{grad} f(x,y) = (1\cdot\cos(\pi), \pi\cdot\cos(\pi)) = (-1, -\pi)$

$\Rightarrow D_v f(\pi,1) = (-1,-\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1+\sqrt{3}\cdot\pi}{2}$

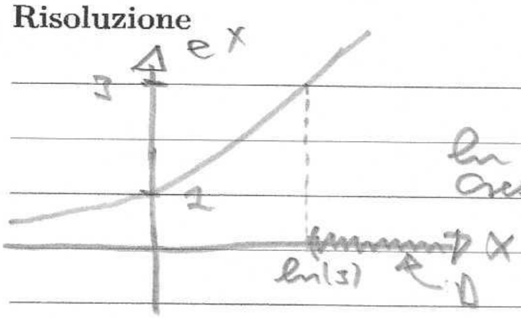
Esercizio 1

[3 punti]

L'estremo inferiore di $D = \{x \in \mathbb{R} : e^x > 3\}$ è

$\boxed{a}$ ~~X~~ $-\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ $\boxed{b}$ un numero negativo $\boxed{c}$ 0 $\boxed{d}$ non esiste

Risoluzione



$e^x > 3 \iff \ln(e^x) > \ln(3)$

ln è strett. crescente ↑ $\quad \ln(e^x) = x, \quad \ln(3) = -\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

Quindi $D = \left(-\ln\left(\frac{1}{3}\right), +\infty\right) \Rightarrow$ a)

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = 2x - \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è

$\boxed{a}$ ha infiniti punti critici $\boxed{b}$ periodica $\boxed{c}$ ~~X~~ crescente $\boxed{d}$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste

Risoluzione

f è derivabile con $f'(x) = 2 + \sin(x)$. Visto che $\sin(x) \in [-1,1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$ segue $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f è (strett.) crescente.

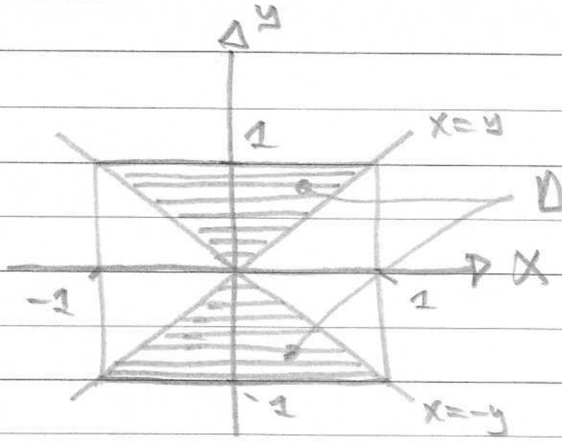
Esercizio 3

[3 punti]

Il dominio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1], -|y| \leq x \leq |y|\}$ è

$\boxed{a}$ ~~X~~ x ma non y-semplice $\boxed{b}$ y ma non x-semplice $\boxed{c}$ x e y-semplice $\boxed{d}$ non è semplice

Risoluzione



X è dato come dominio x-semplice ma non si può scrivere come dominio y-semplice: Non $\exists$ funzioni $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$D = \{(x,y) \mid x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\,n^{11} + 4\,e^{n\ln(n)}}{5\,n^n + 7\,n!} = a_n$$

Risoluzione

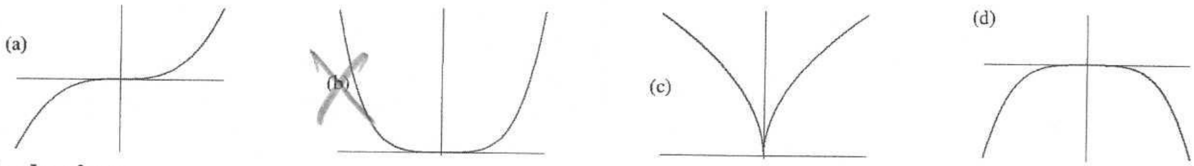
$e^{n\cdot\ln(n)} = \left(e^{\ln(n)}\right)^n = n^n$. Come nel compito 1-A segue

$a_n \to \frac{4}{5}$ per $n \to +\infty$

Esercizio 5

[4 punti]

Parte del grafico di $f(x) = \cosh(x^3) - 1$ è dato da



Risoluzione

$\cosh(x)$ è pari $\Rightarrow$ $\cosh(x^3)$ è pari:

$\cosh((-x)^3) = \cos(-x^3) = \cosh(x^3)$. Quindi

- f è pari $\Rightarrow$ non a)
- f è derivabile $\Rightarrow$ non c)
- $\cosh(x) \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(x) \geq 0$ $\forall x$ $\Rightarrow$ non d)

Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\, dx = I$$

Risoluzione

Sost. $t = \sqrt{x} \Rightarrow$ (come nel compito 7-A)

$$I = \int_0^{\pi} 2t \cdot \cos(t)\, dt$$

$$\underset{\text{int. per parti}}{=} 2\left[\cos(t) + t \cdot \sin(t)\right]_0^{\pi} = -4$$