Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore **25.1.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di un insieme $D \subset \mathbb{R}$ tale che $\inf D = 5$ e $\min D$ non esiste.

Risposta

(i) $r \in \mathbb{R}$ si chiama minorante di D se $r \leq x \ \forall x \in D$;
l'estremo inferiore di D è il minorante più grande di D

(ii)

$D = (5, +\infty)$.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema di Fubini–Tonelli per domini y-semplici.

(ii) Calcolare $|X| = \iint_X 1 \, dx \, dy$ per $X = \{(x, y) : x \in [0, 1], \ 0 \leq y \leq x^2\}$.

Risposta

(i) Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e X un dominio semplice.
Allora f è integrabile su X e $\{(x,y) \mid x \in [a,b], h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$

$$\iint_X f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx \quad \text{se } X = \{(x,y) \mid x \in [a,b], h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\} \text{ è } y\text{-semplice}$$

(ii)

$$|X| = \int_0^1 \int_0^{x^2} 1 \, dy \, dx = \int_0^1 y \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\sqrt{|a_n|} \sim e^{-n}$ per $n \to +\infty$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

[a] diverge [~~b~~] converge [c] è irregolare [d] non si può concludere nulla

Risoluzione

princ. di sost.

$\sqrt{|a_n|} \sim e^{-n} \Rightarrow |a_n| \sim (e^{-n})^2 = e^{-2n} = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n.$

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ converge $\left(q = \frac{1}{e^2} < 1\right) \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (criterio del confronto asint.)

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C[a,b]$ e $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$. Allora

[~~a~~] f ha almeno un punto critico [b] $f(a)\cdot f(b) \le 0$

[c] $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ con $x \in [a,b]$ ha almeno un punto critico [d] f è monotona

Risoluzione

Per il teor. fond. del calc. integrale la funz. F in c) e' derivabile con $F'(x) = f(x)$. Quindi $F'(c) = f(c) = 0$ $\Rightarrow$ a)

<u>P.S:</u> Leggere la nota sul compito 2-B !!

Esercizio 3

[3 punti]

Il polinomio di McLaurin di ordine 3 di $f(x) = \sin(x + x^2)$ è dato da $T_3(x) =$

[a] $x + x^2$ [b] $x - \frac{x^3}{3}$ [~~c~~] $x + x^2 - \frac{x^3}{6}$ [d] 0

Risoluzione

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \Rightarrow$

$t = x + x^2 \sim x$ per $x \to 0$

$\sin(x+x^2) = x + x^2 - \frac{(x+x^2)^3}{6} + o\left((x+x^2)^3\right)$

$= x + x^2 - \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3)$

$= \underbrace{x + x^2 - \frac{x^3}{6}}_{= T_3(x)} + o(x^3)$

Esercizio 4

[4 punti]

Verificare se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = f(x,y)$$

Risoluzione

Se poniamo $x=y$ segue $f(x,x) = \frac{-x^3}{2x^2} = -\frac{1}{2}\cdot x \to 0$ per $x \to 0$

Quindi il candidato limite è $\ell = 0$. Per verificare che il limite $\exists$ passiamo alle coord. polari:

$$|f(x,y) - 0| = \left| \rho \cdot \cos(\vartheta) \cdot \frac{\cancel{\rho^2} \cdot \cos^2(\vartheta) - 2\cancel{\rho^2} \cdot \sin^2(\vartheta)}{\cancel{\rho^2}} \right|$$

$$= \rho \cdot \left| \cos(\vartheta) \cdot (\cos^2(\vartheta) - 2\sin^2(\vartheta)) \right|$$

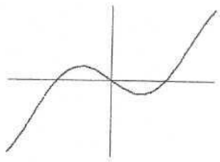
$$\leq \rho \cdot 3 = g(\rho) \to 0 \quad \text{per } \rho \to 0$$

$\Rightarrow$ il limite $= 0$.

Esercizio 5

[4 punti]

La curva in figura è parte del grafico di



- ~~[a]~~ $f(x) = -x \cdot \cos(x)$
- [b] $f(x) = -x \cdot \cosh(x)$
- [c] $f(x) = x \cdot \cos(x)$
- [d] $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

Risoluzione

Il grafico dimostra una funzione dispari

$\Rightarrow$ non d): $x^2 \cdot \cosh(x)$ è pari. Inoltre

- non è b) in quanto $f(x) = -x \cdot \overbrace{\cosh(x)}^{>0 \text{ sempre}} < 0 \ \forall x > 0$
- non è c) in quanto $f(x) = x \cdot \cos(x) > 0$ per $x \in (0, \pi)$

Quindi a)

Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \ln(\sqrt{1+x})\, dx =: I$$

Risoluzione

Sost: $\sqrt{1+x} = t \iff 1+x = t^2$

$\iff x = t^2 - 1$

$\Rightarrow \cdot \frac{dx}{dt} = 2t.$

$\cdot\ x=0 \Rightarrow t = \sqrt{1+0} = 1$

$\cdot\ x=1 \Rightarrow t = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$ Quindi segue

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \underbrace{2t}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(t)}_{g}\, dt = \underbrace{t^2 \cdot \ln(t)}_{f \cdot g}\Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \underbrace{t^2 \cdot \frac{1}{t}}_{f \cdot g'}\, dt$$

$$= 2 \cdot \ln(\sqrt{2}) - 0 - \int_1^{\sqrt{2}} t\, dt$$

$$= 2 \cdot \ln(2^{\frac{1}{2}}) - \frac{t^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \ln(2) - \frac{(\sqrt{2})^2}{2} + \frac{1^2}{2}$$

$$= \underline{\underline{\ln(2) - \frac{1}{2}}}$$